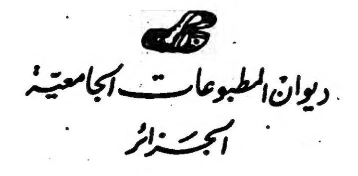
الدكتور شيرزاد الطالباني
أستاذ محاضر في معهد
الرياضيات ـ جامعة قسنطينة

الدكتورة نازدار اسماعيل
أستاذة مساعدة في معهد
الرياضيات ـ جامعة قسنطينة

محاضرات في الجبر الخطي

الطبعة الثالثة 1989



مقدمة

تتناول فصول هذا الكتاب بعض مواضيع الجبر الخطي التي ارتأينا ضرورتها لطلبة الجامعات ، ونأمل أن يساعد هذا الكتاب على تلافي بعض الفراغ في المكتبة العربية في هذا الميدان النظري الأساسي . سيكون الاهتمام الاكثر مركزاً على الجانب النظري ، حيث نتعرض بالتفصيل لمجموعة كبيرة من النظريات في كل موضوع من مواضيع الكتاب مرفوقة بالبراهين التفصيلية مع أمثلة توضيحية مناسبة لكثير من التعاريف والنظريات من اجل تسهيل فهمها . في نهاية كل فصل قدمنا مجموعة من التمارين ، ينبغي حلها من اجل تمهيد الطريق لفهم الفصول اللاحقة .

الكتاب موجه لدارسين يتمتعون بحد مناسب من المعرفة لبعض المبادئ الاولية في الجبر بالأخص : المجموعات ، العلاقات التطبيقات ، العمليات ، الزمر ، الحلقات والحقول ، ومع ذلك نعرض لبعض تلك المفاهيم الضرورية في التمهيد .

سيكون من دواعي سرورنا وأمتناننا ان نتلقى ملاحظات الزملاء والطلبة لبغية تحسين هذا الكتاب في طبعاته اللاحقة . نقدم شكرنا الخاص للدكتور مرعي غانم للمساعدة القيمة التي قدمها لنا في صياغة وتنقيح لبعض الجوانب اللغوية من هذا الكتاب .

د . شيرزاد الطالباني   د . نازدار اسماعيل

قسنطينة في 14 - 02 - 1987

المحتويات

- تمهيد -

سنرمز للمجموعات بالأحرف اللاتينية الكبيرة A ، B ... الخ ولعناصر المجموعة بالأحرف a ، b ، ... الخ .

الزوج المرتب ذات العنصر الأول a ، والعنصر الثاني b ، نرمز له ب : (a,b).

ومجموعة جميع الأزواج المرتبة (a,b) عندما $a \in A$ و $b \in A$ ، نرمز لها ب $A \times B$ ونسميها بالجداء الديكارتي للمجموعتين A ، B .

العلاقة R في المجموعة A هي اي مجموعة جزئية من الجداء الديكارتي $A \times A$. ونقول أن العلاقة R في المجموعة A هي :

(1) أنعكاسية : إذا كانت لكل $a \in A$ ، aRa .

(2) تناظرية : إذا كانت لكل $a,b \in A$ ، aRb فأن bRa .

(3) متعدية : إذا كانت لكل $a,b,c \in A$ ، aRb و bRc فأن aRc .

العلاقة التي تحقق (1) ، (2) و (3) تسمى علاقة تكافؤ .

التطبيق f من المجموعة A في المجموعة B ، والذي نرمز له بالرمز $f : A \to B$ هو عملية ربط كل عنصر $a \in A$ لعنصر وحيد $b \in B$ يسمى بصورة العنصر $a \in A$ وفق التطبيق f ، ونكتب $f(a)=b$. ونرمز للتطبيقات بالرمز f ، g ، h ... الخ .

إذا كان $f : A \to B$ تطبيقاً ، فأن صورة المجموعة الجزئية $A_1 \subset A$ وفق التطبيق f نرمز لها ب $f(A_1)$ وعبارة عن :

$$f(A_1) = \{ b \in B \; ; \; \exists \, a \in A_1 \; , \; f(a) = b \}$$

والصورة العكسية للمجموعة الجزئية $B_1 \subset B$ وفق التطبيق f

نرمز لها بالرمز $f^{-1}(B)$ ، عبارة عن : $f^{-1}(B) = \{a \in A : f(a) \in B_1\}$

إذا كان $f : A \to B$ ، $f(A) = B$ عندئذ نقول ان f عبارة عن تطبيق غامر من المجموعة A على المجموعة B ، ونقول عن f انه متباين إذا تحقق ، لكل $a, b \in A$ إذا كان $f(a) = f(b)$ فأن $a = b$ أو بالعكس، إذا كان $a \neq b$ فأن $f(a) \neq f(b)$. التطبيق المتباين والغامر نسميه بالتطبيق التقابلي .

التطبيق $f : A \to A$ والمعرف ب: لكل $a \in A$ ، $f(a) = a$ نسميه بالتطبيق المطابق (أو الحيادي) ونرمز له بالرمز Id_A .

يتساوى التطبيقان $f, g : A \to B$ إذا كان لكل $a \in A$ ، $f(a) = g(a)$.

إذا كان $f : A \to B$ ، $g : B \to C$ تطبيقين، فأن التطبيق $h : A \to C$ والذي يحقق: انه لكل $a \in A$ ، $h(a) = g(f(a))$ يسمى بتركيب التطبيقين f ، g ، ونرمز لذلك ب $g \circ f$ اي ان :

$$\forall a \in A \ , \quad h(a) = (g \circ f)(a) = g(f(a))$$

إذا كان $f : A \to B$ تطبيقاً تقابلياً ، فأنه يوجد تطبيق وحيد $g : B \to A$ بحيث $f \circ g = Id_B$ ، $g \circ f = Id_A$ ، نسميه بالتطبيق العكسي للتطبيق f ونرمز له ب : f^{-1} ، ويكون لدينا ،

$$f^{-1}(b) = a \Leftrightarrow f(a) = b$$

العملية الداخلية في المجموعة A ، (سنكتب للاختصار العملية في A) هي كل تطبيق من $A \times A$ في A .

والعملية الخارجية على المجموعة A بالنسبة للمجموعة B ، هي كل تطبيق من $B \times A$ في A .

نعرف الزمرة بأنها مجموعة غير خالية G، ذات عملية داخلية ولتكن $*$، بحيث تتحقق الشروط التالية :-

(1) العملية $*$ تجميعية في المجموعة G اي انه :

$$\forall a,b,c \in G \quad , \quad a*(b*c) = (a*b)*c$$

(2) يوجد عنصر حيادي e بالنسبة للعملية $*$ في المجموعة G أي انه :

$$\exists e \in G , \forall a \in G \quad , \quad a*e = e*a = a$$

(3) لكل $a \in G$ يوجد عنصر نظير $a' \in G$ بالنسبة للعملية $*$ في المجموعة G، اي انه :

$$\forall a \in G \ \exists a' \in G \quad , \quad a*a' = a'*a = e$$

ونقول عندئذ ان $(G,*)$ زمرة . ونقول ان $(G,*)$ زمرة تبديلية إذا كانت العملية $*$ تبديلية في G، اي انه :

$$\forall a,b \in G \quad ; \quad a*b = b*a$$

سنرمز للعملية $*$ في الزمرة في هذا الكتاب بالجمع وبذلك يكون العنصر الحيادي هو "0" ولنظير العنصر a هو $-a$.

الزمرة الجزيئية في الزمرة $(G,+)$ هي مجموعة جزيئية غير خالية ولتكن H من الزمرة $(G,+)$، بحيث ان $(H,+)$ هي نفسها زمرة، اي ان الزمرة الجزيئية في الزمرة G هي مجموعة جزيئية غير خالية H، بحيث ان H هي زمرة بالنسبة لنفس العملية في G .

نعرف الحلقة بأنها مجموعة غير خالية R ذات عمليتين داخليتين، نرمز للأولى بالجمع، وللثانية بالضرب، بحيث يكون $(R,+)$ زمرة تبديلية ، وتكون عملية الضرب تجميعية في R وتوزيعية بالنسبة للجمع .

إذا وجد عنصر حيادي بالنسبة للضرب في R نرمز له ب 1 ،
ونقول ان $(R,+,\cdot)$ حلقة ذات عنصر حيادي . وإذا كانت
عملية الضرب تبديلية في R عندئذ نقول ان الحلقة R
هي حلقة تبديلية .

إذا كانت في الحلقة التبديلية ذات العنصر الحيادي R تتحقق
الخاصية انه لكل $a,b\in R$ إذا كان $ab=0$ فأن $a=0$ أو $b=0$.
(وهذا الشرط يكافئ الشرط انه إذا كان $a\neq 0$ و $b\neq 0$ فأن
$ab\neq 0$) عندئذ نقول أن الحلقة R هي حلقة تامة .

نعرف الحقل بأنه الحلقة التامة K والتي يتحقق انه
لكل $0\neq a\in K$ يوجد $0\neq a'\in K$ بحيث انه $aa'=a'a=1$.
اي انه لكل عنصر من K مختلف عن الصفر نظيراً بالنسبة لعملية الضرب. أي
انه $(K,+)$ زمرة تبديلية و $(K\setminus\{0\},\cdot)$ زمرة تبديلية .

الفصل الاول
الفضاء الشعاعي

1.1 خواص أولية

1.1.1 تعريف

ليكن K حقلاً ، V مجموعة غير خالية ، نقول ان V هو فضاء شعاعي على الحقل K إذا تحقق الشرطان التاليان:

(1) إذا كان $(V,+)$ زمرة تبديلية ،

(2) إذا وجد تطبيق الجداء الديكارتي $K \times V$ في V بحيث يشارك كل زوج مرتب $(\lambda, x) \in K \times V$ بعنصر من V ندل عليه بالرمز λx ، ويحقق الخواص التالية :

(a) $\forall \lambda, \mu \in K \ , \ \forall x \in V \ , \ (\lambda + \mu) x = \lambda x + \mu x$

(b) $\forall \lambda \in K \ , \ \forall x, y \in V \ , \ \lambda (x + y) = \lambda x + \lambda y$

(c) $\forall \lambda, \mu \in K , \forall x \in V \ , \ \lambda (\mu x) = (\lambda \mu) x$

(d) $\forall x \in V \ , \ 1 . x = x$

حيث 1 هو العنصر الحيادي في الحقل K . تسمى عناصر V بالأشعة ، وعناصر K مقادير سلمية ، ويسمى التطبيق $(\lambda, x) \to \lambda x$ ضرب الشعاع x بالمقدار السلمي λ .

2.1.1 أمثلة :

(1) مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$، هي فضاء شعاعي على حقل الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

(2) مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$، هي فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{R}$.

(3) $\mathbb{R}^2$ هي فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{R}$ ، لأن $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ أي $\mathbb{R}^2$ هي زمرة ابلية بالنسبة لعملية جمع الأزواج المرتبة ، ولنعرف الضرب بمقدار سلمي كمايلي :

$$\forall \lambda\in\mathbb{R} \;,\; \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \;,\; \lambda(x,y) = (\lambda x, \lambda y)$$

يحقق جميع خواص الفضاء الشعاعي .

ويمكن تعميم المثال السابق على $\mathbb{R}^n$. في المجموعة $\mathbb{R}^n$ نعرف عملية الجمع كمايلي :

$$\forall (x_1,\dots,x_n) \,,\, (y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n ,\; (x_1,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n) = $$
$$= (x_1+y_1, \dots\dots, x_n+y_n)$$

ونعرف الضرب بمقدار سلمي كمايلي :

$$\forall \lambda\in\mathbb{R} \;,\; \forall (x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \;,\; \lambda(x_1,\dots,x_n) = (\lambda x_1,\dots,\lambda x_n)$$

نلاحظ ان $(\mathbb{R}^n,+)$ زمرة تبديلية ، والضرب بمقدار سلمي يحقق جميع خواص الفضاء الشعاعي .

(4) ليكن V_1 ، V_2 فضاءين شعاعيين على نفس الحقل K . نعرف عملية الجمع في $V_1\times V_2$ كمايلي :

$$\forall (x,y) \,,\, (x_1,y_1)\in V_1\times V_2 \,,\, (x,y)+(x_1,y_1) = (x+x_1, y+y_1)$$

من الواضح ان $(V_1\times V_2 , +)$ زمرة تبديلية .

ونعرف الضرب بمقدار سلمي كما يلي :

$$\forall \lambda \in K \;,\; \forall (x,y) \in V_1 \times V_2 \;,\; \lambda(x,y) = (\lambda x, \lambda y)$$

يحقق جميع خواص الفضاء الشعاعي . فإن $V_1 \times V_2$ هو فضاء شعاعي على الحقل K ، يسمى بالجداء الديكارتي للفضاءين V_1 ، V_2 .

3.1.1 قواعد الحساب في الفضاء الشعاعي

ليكن V فضاءاً شعاعياً على الحقل K .

(1) نرمز للعنصر الحيادي في الزمرة $(V,+)$ بالرمز « 0_V » ونسميه الشعاع الصفري ، فإنه لأي $\lambda \in K$ ، $\lambda . 0_V = 0_V$ ، لأنه :-

$$\forall v \in V ,\; \lambda . 0_V = \lambda . 0_V + 0_V = \lambda . 0_V + ((\lambda v) + (-(\lambda v))) =$$
$$= (\lambda . 0_V + \lambda v) + (-(\lambda v)) = \lambda(0_V + v) + (-(\lambda v)) =$$
$$= \lambda v + (-(\lambda v)) = 0_V$$

(2) نرمز للعنصر الحيادي بالنسبة للجمع في الحقل K بالرمز « 0_K » فإنه لكل $v \in V$ ، $0_K . v = 0_V$ ، لأنه :-

$$0_K . v = 0_K . v + 0_V = 0_K . v + (v + (-v)) = (0_K . v + 1.v) + (-v) =$$
$$= (0_K + 1) v + (-v) = 1.v + (-v) = v + (-v) = 0_V$$

(3) لكل $v \in V$ ، $(-1)v = -v$ ، لأنه :

$$(-1)v = (-1)v + 0_V = (-1)v + (v + (-v)) = ((-1)v + 1.v) + (-v) =$$
$$= ((-1)+1)v + (-v) = 0_K . v + (-v) = 0_V + (-v) = -v$$

(4) لكل $\lambda \in K$ بحيث $\lambda \neq 0_K$ ولكل $v \in V$ إذا كان $\lambda v = 0_V$ فإن : $v = 0_V$.

لنفرض $\lambda v = 0_V$ فأنه يوجد λ^{-1} في الحقل K ،

$$v = 1 \cdot v = (\lambda^{-1}\lambda) v = \lambda^{-1}(\lambda v) = \lambda^{-1} \cdot 0_V = 0_V$$

(5) لكل $v_1, v_2, v_3 \in V$ إذا كان $v_1 + v_3 = v_2 + v_3$ فأن : $v_1 = v_2$.

$$v_1 = v_1 + (v_3 + (-v_3)) = (v_1 + v_3) + (-v_3) = (v_2 + v_3) + (-v_3) =$$
$$= v_2 + (v_3 + (-v_3)) = v_2$$

ونقول ان كل عنصر منتظم بالنسبة للجمع في الفضاء الشعاعي V.

(6) لكل $v_1, v_2 \in V$ نعرف $v_1 - v_2 = v_1 + (-v_2)$ فأنه:

$$\forall \lambda \in K ,\ \forall v \in V ,\ (-\lambda) v = -\lambda v = \lambda(-v)$$

$$\lambda(-v) = \lambda(-v) + ((\lambda v) + (-\lambda v)) = (\lambda(-v) + \lambda v) + (-\lambda v) =$$
$$= \lambda((-v) + v) + (-\lambda v) = \lambda \cdot 0_V + (-\lambda v) = 0_V + (-\lambda v) =$$
$$= -\lambda v$$

$$(-\lambda) v = (-\lambda) v + (\lambda v + (-\lambda v)) = ((-\lambda) v + \lambda v) + (-\lambda v) =$$
$$= ((-\lambda) + \lambda) v + (-\lambda v) = 0_K \cdot v + (-\lambda v) = 0_V + (-\lambda v) =$$
$$= -\lambda v$$

<u>ملاحظة</u>

أعتباراً من الآن نستخدم "0" بدلاً عن كل من 0_K ، 0_V . وعلى القارئ أن يميز إذا كان مقداراً سلمياً أو شعاعاً .

٢.١ الفضاء الشعاعي الجزئي

١.٢.١ تعريف

ليكن V فضاءً شعاعياً على الحقل K ، ولتكن F مجموعة جزئية غير خالية من V . نسمي F فضاءً شعاعياً جزئياً من الفضاء الشعاعي V ، إذا كان F فضاءً شعاعياً بالنسبة لنفس العمليتين في V (اي الجمع في V والضرب بمقدار سلمي في K) . اي انه إذا كان $(F, +)$ زمرة جزئية من الزمرة $(V, +)$ وكذلك لكل $\lambda \in K$ ، ولكل $v \in V$ يكون $\lambda v \in F$ ، وتتحقق الشروط من (a) الى (d) المذكورة في (١.١.١) .

٢.٢.١ نظرية

لتكن F مجموعة جزئية غير خالية من الفضاء الشعاعي V على الحقل K . فأن F تكون فضاءً شعاعياً جزئياً إذا وفقط إذا كانت :

$$\forall v_1, v_2 \in F \quad , \quad v_1 - v_2 \in F \quad (1)$$

$$\forall v_1 \in F, \ \forall \lambda \in K \ , \ \lambda v_1 \in F \quad (2)$$

البرهان :

إذا كان F فضاءً شعاعياً جزئياً ، عندئذ $(F, +)$ زمرة جزئية من الزمرة $(V, +)$ ، اي انه لكل $v_1, v_2 \in F$ فأن $-v_2 \in F$ ، ومنه $v_1 - v_2 = v_1 + (-v_2) \in F$. ومن خواص الفضاء الشعاعي الجزئي انه يوجد التطبيق $f : K \times F \to F$ بحيث لكل $v_1 \in F$ ولكل $\lambda \in K$

$f(\lambda, v_1) = \lambda v_1$ اي انه يتحقق الشرط الثاني .

للبرهان على العكس ، باستخدام الشرط الأول لكل $v \in F$ فأن $0 = v - v \in F$. وكذلك لكل $v \in F$ ، بما أن $0 \in F$ فأن $-v = 0 - v \in F$.

واخيراً لكل $v_1, v_2 \in F$ فأن $-v_2 \in F$ ومنه $v_1 + v_2 = v_1 - (-v_2) \in F$. نستنتج ان F هي زمرة بالنسبة لنفس العملية في V ، وبما انها محتواة في V فأن F هي زمرة جزئية من V . ومن الشرط الثاني نستنتج انه لكل $v_1 \in F$ ولكل $\lambda \in K$ فأن $\lambda v_1 \in F$ ، ومن هنا فأن جميع الشروط من (a) الى (d) تتحقق ، اي ان F هو فضاء شعاعي على الحقل K ، وهي مجموعة جزئية من V ، فأن F فضاء شعاعي جزئي من الفضاء الشعاعي V.

(و . هـ . م .)

3.2.1 نتيجة

ليكن V فضاءاً شعاعياً على الحقل K ، ولتكن F مجموعة جزئية غير خالية من V . فأن F تكون فضاءاً شعاعياً جزئياً من الفضاء الشعاعي V $\Longleftrightarrow$ $\forall \lambda, \mu \in K, \forall v_1, v_2 \in F, (\lambda v_1 + \mu v_2) \in F$

من هنا نلاحظ انه : $\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K, \forall v_1, \ldots, v_n \in F, (\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n) \in F$

4.2.1 أمثلة

(1) $\{0_V\}$ والمجموعة V هما فضاءان شعاعيان جزئيان من كل فضاء شعاعي V على الحقل K . الفضاء الشعاعي الجزئي الذي يختلف عن $\{0_V\}$ و V يسمى بالفضاء الشعاعي الجزئي الحقيقي .

(2) لتكن $\mathbb{R}^2$ فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{R}$ ، فأن المجموعة الجزئية $A=\{(x,0)\in\mathbb{R}^2 \; ; \; x\in\mathbb{R}\}$ هي فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^2$.

5.2.1 نظرية

لتكن $\{F_i\}_{i\in I}$ أسرة فضاءات شعاعية جزئية من الفضاء الشعاعي V على الحقل K ، و $F=\bigcap\limits_{i\in I}F_i$. فأن F عبارة عن فضاء شعاعي جزئي من الفضاء الشعاعي V .

البرهان :

بما أنه لكل $i\in I$ ، F_i عبارة عن فضاء شعاعي جزئي من V ، فأن $0\in F_i$ لكل $i\in I$ ، ومنه $0\in F=\bigcap\limits_{i\in I}F_i$. ليكن $x_1,x_2\in F$ فأنه $x_1\in F_i$ و $x_2\in F_i$ لكل $i\in I$. بما ان F_i هي فضاء شعاعي جزئي من V لكل $i\in I$ ، فأن $x_1-x_2\in F_i$ لكل $i\in I$ حسب النظرية (2.2.1) ، أي ان $x_1-x_2\in F=\bigcap\limits_{i\in I}F_i$. لكل $\lambda\in K$ ولكل $x\in F$ فأن $x\in F_i$ لكل $i\in I$. بما أن F_i هي فضاء شعاعي جزئي من V لكل $i\in I$ ، فأن $\lambda x\in F_i$ لكل $i\in I$ حسب النظرية (2.2.1) ، اي ان $\lambda x\in F$ ، فأن $F=\bigcap\limits_{i\in I}F_i$ عبارة عن فضاء شعاعي جزئي من الفضاء V . (و. هـ. م)

من الجدير بالذكر ان اتحاد فضاءين شعاعيين جزئيين ليس لشكل عام فضاءاً شعاعياً جزئياً .

فمثلاً في الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^2$ على الحقل $\mathbb{R}$ ، لتكن
$F_1 = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 ; x \in \mathbb{R}\}$ ، $F_2 = \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 ; y \in \mathbb{R}\}$ فضاءين
شعاعيين جزئيين من $\mathbb{R}^2$ ، فإن $F_1 \cup F_2$ لا يكون فضاءً
شعاعياً جزئياً من $\mathbb{R}^2$ ، لأنه مثلاً $(3,0) \in F_1$ و $(0,2) \in F_2$
فإن $(3,0) \in F_1 \cup F_2$ و $(0,2) \in F_1 \cup F_2$ ، عندنا $(0,2) + (3,0) = (3,2)$
لكن $(3,2) \notin F_1 \cup F_2$.

3.1 جمع الفضاءات الشعاعية

1.3.1 نظرية

ليكن V_1 ، V_2 فضاءين شعاعيين جزئيين
من الفضاء الشعاعي V على الحقل K ، فإن
$V_1 + V_2 = \{v_1 + v_2 : v_1 \in V_1 \wedge v_2 \in V_2\}$ هو فضاء
شعاعي جزئي من الفضاء الشعاعي V .

البرهان :

لكل $x, y \in V_1 + V_2$ فإنه توجد $v_1, v_1' \in V_1$ و $v_2, v_2' \in V_2$
بحيث $x = v_1 + v_2$ ، $y = v_1' + v_2'$ فإن :

$$x - y = v_1 + v_2 - (v_1' + v_2') = (v_1 - v_1') + (v_2 - v_2')$$

بما أن V_1 ، V_2 فضاءان شعاعيان جزئيان من V ،
فإنه حسب النظرية $(2.2.1)$ ، $v_1 - v_1' \in V_1$ و $v_2 - v_2' \in V_2$
فإن $x - y \in V_1 + V_2$.
لكل $\lambda \in K$ ولكل $x \in V_1 + V_2$ ، فإن $x = v_1 + v_2$ حيث

$v_1 \in V_1$ و $v_2 \in V_2$ فأن : $\lambda x = \lambda(v_1+v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2$

لكن حسب النظرية (2.2.1) $\lambda v_1 \in V_1$ ، $\lambda v_2 \in V_2$ لأن

V_1 ، V_2 فضاءان شعاعيان جزئيان من V ، فأن

$\lambda x \in V_1+V_2$ ، فأنه بذلك $V_1 + V_2$ هو فضاء

شعاعي جزئي من الفضاء الشعاعي V على الحقل K.

(و. هـ. م)

2.3.1 تعريف

نسمي الفضاء الشعاعي الجزئي V_1+V_2 من النظرية

(1.3.1)، مجموع الفضاءين الشعاعيين الجزئيين V_1 ، V_2،

ويمكن تعميم هذا التعريف الى جمع n من الفضاءات

الشعاعية الجزئية ، ليكن $V_1, \ldots, V_n$ فضاءات

شعاعية جزئية من الفضاء الشعاعي V على الحقل

K ، فأن $V_1 + \cdots + V_n$ هو فضاء شعاعي جزئي

من الفضاء V ، يسمى بمجموع الفضاءات الشعاعية

الجزئية $V_1, \ldots, V_n$.

3.3.1 نظرية

ليكن $V_1, \ldots, V_n$ $(n \geqslant 2)$ فضاءات شعاعية

جزئية من الفضاء الشعاعي V على الحقل K ، فأن

الشرطين التاليين متكافئان :

(1) $V_i \cap (V_1 + \cdots + V_{i-1} + V_{i+1} + \cdots + V_n) = \{0\}$

(2) إذا كان $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ ،

$a_i, b_i \in V_i$ لأي $i = 1, \ldots, n$ فأن $a_j = b_j$ $(j = 1, \ldots, n)$

البرهان :

نفرض (1) صحيحة ، ولكن $a_1 + \cdots + a_n = b_1 + \cdots + b_n$

حيث $a_i, b_i \in V_i$ لأي $i = 1, \ldots, n$ ، ولأي $1 \leq j \leq n$ فأن:

$$a_j - b_j = (b_1 - a_1) + \cdots + (b_{j-1} - a_{j-1}) + (b_{j+1} - a_{j+1}) + \cdots + (b_n - a_n)$$

وبما أن $a_i, b_i \in V_i$ لأي $i = 1, \ldots, n$ و V_i هو فضاء شعاعي جزئي من V ، فأن $b_i - a_i \in V_i$ أي أن :

$$a_j - b_j \in V_j \cap (V_1 + \cdots + V_{j-1} + V_{j+1} + \cdots + V_n)$$

لكن حسب الشرط الاول

$$V_j \cap (V_1 + \cdots + V_{j-1} + V_{j+1} + \cdots + V_n) = \{0\}$$

إذن $a_j - b_j = 0$ ، ومنه $a_j = b_j$ لأي $j = 1, \ldots, n$.

نفرض (2) صحيحة ، ولنفرض ان

$$V_i \cap (V_1 + \cdots + V_{i-1} + V_{i+1} + \cdots + V_n) \neq \{0\}$$

ليكن $a \in V_i \cap (V_1 + \cdots + V_{i-1} + V_{i+1} + \cdots + V_n)$

فأن $a \in V_i$ وكذلك $a \in V_1 + \cdots + V_{i-1} + V_{i+1} + \cdots + V_n$

فأن : $a = a_1 + \cdots + a_{i-1} + a_{i+1} + \cdots + a_n$

حيث $a_j \in V_j$ لكل $j = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n$ من هنا نستنتج ان :

$$a_1 + \cdots + a_{i-1} + (-a) + a_{i+1} + \cdots + a_n = 0 + \cdots + 0$$

من (2) نستنتج أن : $a_1 = 0, \ldots, a_{i-1} = 0, -a = 0, a_{i+1} = 0, \ldots, a_n = 0$

أي أن $a = 0$. (و.هـ.م.)

تعريف 4.3.1

ليكن V فضاءً شعاعياً على الحقل K ، وليكن V_n ، ... ، V_1 فضاءات شعاعية جزئية من الفضاء الشعاعي V . نقول ان الفضاء الشعاعي V هو المجموع المباشر للفضاءات الشعاعية الجزئية V_n ، ... ، V_2 ، V_1 إذا كانت :

$$V = V_1 + V_2 + \cdots + V_n \qquad (1)$$

(2) إذا تحقق احد شرطي النظرية (3.3.1)

عندئذ نكتب $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_n$.

4.1 الارتباط الخطي والاستقلال الخطي

تعريف 1.4.1

ليكن V فضاءً شعاعياً على الحقل K ، ولتكن $v_n, \ldots, v_1$ أشعة ما من V ، $\alpha_n, \ldots, \alpha_1$ مقادير سلمية من الحقل K . فأن الشعاع $x = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$ يسمى مزجاً خطياً للأشعة $v_n, \ldots, v_2, v_1$. ونقول أن الفضاء الشعاعي V مولد بالأشعة $v_n, \ldots, v_1$ إذا كان كل شعاع $v \in V$ هو مزجاً خطياً للأشعة $v_n, \ldots, v_1$.

مثال 2.4.1

لتكن $v_1 = (1,1,1)$ ، $v_2 = (1,2,3)$ ، $v_3 = (2,-1,1)$ اشعة ما من الفضاء الشعاعي IR^3 على الحقل IR ، فأن الشعاع $v = (2 , -2 , 1)$ عبارة عن مزج خطي للأشعة v_1 ، v_2 ، v_3 .

1.4.3 نظرية

ليكن V فضاءاً شعاعياً على الحقل K ، ولتكن $A = \{v_1, \dots, v_p\}$ مجموعة من الاشعة من V . فأن مجموعة جميع المزوج الخطية B للأشعة $v_p , \dots , v_1$ ، هي فضاء شعاعي جزئي من الفضاء V ، وهو اصغر فضاء شعاعي جزئي من V ، يحوي المجموعة A .

البرهان :

نلاحظ $B = \{ v \in V ; \ v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_p v_p \ , \ \alpha_i \in K \}$

$\forall u, v \in B \ ; \ u = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_p v_p \ , \ v = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_p v_p$

حيث $\alpha_i , \beta_i \in K$ لأي $i = 1, 2, \dots , p$.

فأن : $u - v = (\alpha_1 - \beta_1) v_1 + \dots + (\alpha_p - \beta_p) v_p \in B$

وكذلك لكل $\alpha \in K$ ولكل $u \in B$ فأن $\alpha u = \alpha\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha\alpha_p v_p \in B$

اي ان B هي فضاء شعاعي جزئي من V .

لكل $v \in A$ ، $v = 1.v$ حيث $1 \in K$ اي ان $v \in B$ ،

ومنه $A \subseteq B$ • ليكن C فضاءاً شعاعياً جزئياً اخراً من V بحيث $A \subseteq C$ ، فأنه لكل $v \in B$ ،

$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_p v_p$ ، وبما ان $v_p , \dots , v_1 \in C$ ، فأنه حسب النتيجة (3.2.1) ، $v \in C$ ، اي ان $B \subset C$

وهكذا نستنتج ان B اصغر فضاء شعاعي جزئي من V تحوي A .

(و.هـ.م.)

نسمي الفضاء الشعاعي الجزئي B بالفضاء الشعاعي الجزئي المولّد بالمجموعة A ونرمز لها ب $B = [v_1, \dots, v_n]$.

نلاحظ انه إذا كانت A مجموعة جزئية من الفضاء الشعاعي V و $V_1, \dots, V_n$ جميع الفضاءات الشعاعية الجزئية من V بحيث $A \subseteq V_i$ لكل $i = 1, \dots, n$ ، فأن $\bigcap_{i=1}^{n} V_i$ هو فضاء شعاعي جزئي يحوي A ، وهو اصغر فضاء شعاعي جزئي يحوي A .

4 . 4 . 1 تعريف

ليكن V فضاءاً شعاعياً على الحقل K . نقول ان الاشعة $v_1, \dots, v_p$ مرتبطة خطياً إذا وجد p مقداراً سلمياً $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in K$ ليست كلها معدومة بحيث $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_p v_p = 0$. وتكون الأشعة $v_1, v_2, \dots, v_p$ مستقلة خطياً، إذا لم تكن مرتبطة خطياً ، اي انه لأي مقادير سلمية $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in K$ ، إذا كان: $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p = 0$ فأن $\lambda_1 = 0, \dots, \lambda_p = 0$. اي انه إذا كان .

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_i = 0 \quad \text{فأن} \quad \lambda_i = 0 \quad \text{لكل} \quad i .$$

5 . 4 . 1 أمثلة

(1) في الفضاء الشعاعي IR^2 على الحقل IR ، الأشعة $e_1 = (1,0)$ ، $e_2 = (0,1)$ مستقلة خطياً . لأنه لأي مقادير سلمية $\lambda_1, \lambda_2 \in IR$

إذا كانت $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = 0$ فأن: $\lambda_1(1,0) + \lambda_2(0,1) = (0,0)$

، $(\lambda_1, \lambda_2) = (0,0)$ فأن $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ..

(2) في الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^3$ على الحقل $\mathbb{R}$ ، الأشعة $v_1 = (1,3,1)$

، $v_2 = (0,1,-1)$ ، $v_3 = (2,5,3)$ مرتبطة خطياً ، لأنه إذا كان

$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$ حيث $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ فأن

$$\lambda_1(1,3,1) + \lambda_2(0,1,-1) + \lambda_3(2,5,3) = (0,0,0)$$

$$(\lambda_1, 3\lambda_1, \lambda_1) + (0, \lambda_2, -\lambda_2) + (2\lambda_3, 5\lambda_3, 3\lambda_3) = (0,0,0)$$

$$(\lambda_1 + 2\lambda_3 , 3\lambda_1 + \lambda_2 + 5\lambda_3 , \lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3) = (0,0,0)$$

نستنتج أن $\lambda_1 = -2\lambda_3$ ، $\lambda_2 = \lambda_3$. لتكن $\lambda_3 = 1$

عندئذ $\lambda_1 = -2$ ، $\lambda_2 = 1$ وهذه القيم تحقق الشرط :

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$$

(3) 1 ، i مستقلة خطياً في الفضاء الشعاعي $\mathbb{C}$

على الحقل $\mathbb{R}$ ، لأنه لأي $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ إذا كانت

$\lambda_1 . 1 + \lambda_2 . i = 0 = 0.1 + 0.i$ ، فأنه من خواص الاعداد الحقيقية

$\lambda_1 = 0$ ، $\lambda_2 = 0$.

6.4.1 نظرية

ليكن V فضاءاً شعاعياً على الحقل K ، فأن

الأشعة $v_1, \ldots, v_p$ $(p \geq 2)$ مرتبطة خطياً $\Longleftrightarrow$ إذا

كان من الممكن كتابة أحدهما بشكل مزج خطي للبقية.

البرهان

لنفرض ان الأشعة $v_1,\dots,v_p$ مرتبطة خطياً ، اي أنه توجد p مقداراً سلمياً $\lambda_1,\dots,\lambda_p \in K$ ليست كلها معدومة بحيث $\lambda_1 v_1+\dots+\lambda_p v_p=0$ ، لنفرض ان $\lambda_p \neq 0$ عندئذ:

$$-\lambda_p v_p = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{p-1} v_{p-1}$$

فأن:

$$v_p = \frac{-\lambda_1}{\lambda_p} v_1 + \dots + \frac{-\lambda_{p-1}}{\lambda_p} v_{p-1}$$

نضع $\acute{\lambda}_i = \frac{-\lambda_i}{\lambda_p}$ ، فأن:

$$v_p = \acute{\lambda}_1 v_1 + \dots + \acute{\lambda}_{p-1} v_{p-1}$$

ومنه الشعاع v_p عبارة عن مزج خطي للأشعة $v_1,\dots,v_{p-1}$.

للبرهان على العكس ، لنفرض ان الشعاع v_p عبارة عن مزج خطي للأشعة $v_1,\dots,v_{p-1}$ ، فأن $v_p=\lambda_1 v_1+\dots+\lambda_{p-1}v_{p-1}$ ، $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{p-1} v_{p-1} + (-1) v_p = 0$ حيث $\lambda_p=-1\neq 0$ ومنه نستنتج ان $v_1,\dots,v_p$ مرتبطة خطياً .

(و.هـ.م.)

7.4.1 نتائج

(1) إذا كان الشعاع v مزجاً خطياً للأشعة $u_1,\dots,u_n$ ، وإذا كان u_i لأي $i=1,\dots,n$ مزجاً خطياً للأشعة $w_1,\dots,w_m$ ، فأن v هو مزج خطي للأشعة $w_1,\dots,w_m$.

(2) اي مجموعة جزئية من مجموعة اشعة مستقلة خطياً ، تكون مستقلة خطياً .

(3) إذا كانت مجموعة جزئية من مجموعة من الأشعة مرتبطة خطياً ، فأن المجموعة تكون مرتبطة خطياً .

البرهان :

(1) بما أن v مزج خطي للأشعة $u_1, \dots, u_n$ فأن

$$v = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n \quad , \quad \alpha_i \in K \ , \ i = 1, \dots, n$$

و u_i لكل $i = 1, \dots, n$ عبارة عن مزج خطي للأشعة $w_1, \dots, w_m$،

فأن :

$$u_1 = \alpha_{11} w_1 + \dots + \alpha_{m1} w_m \quad , \quad \alpha_{i1} \in K \ , \ i = 1, \dots, m$$

$$u_2 = \alpha_{12} w_1 + \dots + \alpha_{m2} w_m \quad , \quad \alpha_{i2} \in K \ , \ i = 1, \dots, m$$

$$\dots\dots\dots\dots \quad , \quad \dots\dots\dots\dots$$

$$u_n = \alpha_{1n} w_1 + \dots + \alpha_{mn} w_m \quad , \quad \alpha_{in} \in K \ , \ i = 1, \dots, m$$

فأن :

$$v = \alpha_1(\alpha_{11} w_1 + \dots + \alpha_{m1} w_m) + \alpha_2(\alpha_{12} w_1 + \dots + \alpha_{m2} w_m) + \dots + \alpha_n(\alpha_{1n} w_1 + \dots + \alpha_{mn} w_m)$$

$$v = (\alpha_1 \alpha_{11} w_1 + \alpha_2 \alpha_{12} w_1 + \dots + \alpha_n \alpha_{1n} w_1) + \dots + (\alpha_1 \alpha_{m1} w_m + \alpha_2 \alpha_{m2} w_m + \dots + \alpha_n \alpha_{mn} w_m)$$

$$v = (\alpha_1 \alpha_{11} + \alpha_2 \alpha_{12} + \dots + \alpha_n \alpha_{1n}) w_1 + \dots + (\alpha_1 \alpha_{m1} + \alpha_2 \alpha_{m2} + \dots + \alpha_n \alpha_{mn}) w_m$$

فأن :

$$v = \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_m w_m$$

ومنه v عبارة عن مزج خطي للأشعة $w_1, \dots, w_m$.

(2) لتكن $v_1, \dots, v_n$ أشعة مستقلة خطياً ، نبرهن على ان $v_1, \dots, v_m$ مستقلة خطياً . لأي مقادير سلمية $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in K$ $(m < n)$ إذا كان $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_m v_m = 0$ فأن :

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_m v_m + 0 \cdot v_{m+1} + \dots + 0 \cdot v_n = 0$$

لكن $v_1, \dots, v_n$ مستقلة خطياً ، فأن $\alpha_1 = 0, \dots, \alpha_m = 0$

ومنه نستنتج أن $v_1, \dots, v_m$ مستقلة خطياً .

(3) لنفرض ان المجموعة $\{v_1, \dots, v_m\}$ مجموعة جزئية من المجموعة $\{v_1, \dots, v_m, \dots, v_n\}$ ، وان $v_1, \dots, v_m$ مرتبطة خطياً ، فأنه توجد مقادير سلمية $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in K$ ، ليست جميعها معدومة بحيث $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m = 0$ اي ان :

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m + 0 \cdot v_{m+1} + \dots + 0 \cdot v_n = 0$$

وكذلك ليست كل المقادير السلمية معدومة ، وبالتالي فأن $v_1, \dots, v_m, \dots, v_n$ مرتبطة خطياً .

(و . هـ . م .)

5 . 1 الأساس والبعد

1 . 5 . 1 تعريف

لتكن V فضاءاً شعاعياً على الحقل K ، نقول أن مجموعة الاشعة $\{v_1, \dots, v_n\}$ هي اساس للفضاء الشعاعي V ، إذا تحقق مايلي :

(1) إذا كانت $v_1, \dots, v_n$ مستقلة خطياً .

(2) إذا كان أي شعاع من V مزجاً خطياً للأشعة $v_1, \dots, v_n$ اي

ان مجموعة الأشعة $\{v_1, \dots, v_n\}$ تولد الفضاء الشعاعي V .
نسمي عدد اشعة الأساس لبعد الفضاء الشعاعي V. إذا كان عدد اشعة الأساس في الفضاء V هو n، عندئذ نقول ان V ذو بعد منتهي n . نرمز لبعد الفضاء الشعاعي V بالرمز $\dim V$ ونكتب $\dim V = n$، وأن $\dim\{0\} = 0$.
إذا لم يوجد للفضاء الشعاعي أساس منتهي ، عندئذ نقول ان بعد الفضاء الشعاعي V غير منتهي ونكتب $\dim V = \infty$.
إذا كان الشعاع $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ حيث $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$، نسمي المقادير السلمية $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ، مركبات الشعاع v في الأساس $\{v_1, \dots, v_n\}$.

1. 5. 2 أمثلة

(1) في الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^2$ على الحقل $\mathbb{R}$ ، برهنا ان الشعاعين $e_1 = (1,0)$ ، $e_2 = (0,1)$ مستقلان خطياً ، وكذلك لكل $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$
$(\alpha, \beta) = \alpha(1,0) + \beta(0,1)$. اي ان، اي شعاع من $\mathbb{R}^2$ عبارة عن مزج خطي للشعاعين e_1 ، e_2 ، اي ان المجموعة $\{e_1, e_2\}$ تولد الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^2$ ، وبذلك فأن $\{e_1, e_2\}$ هي اساس للفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^2$ وان $\dim \mathbb{R}^2 = 2$. ويسمى هذا الاساس ، بالأساس النظامي لـ $\mathbb{R}^2$. وعلى غرار ذلك نلاحظ ان الاساس النظامي للفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^n$ على الحقل $\mathbb{R}$ هو المجموعة $\{e_1 = (1,0,\dots,0), \dots, e_n = (0,0,\dots,1)\}$ وبذلك $\dim \mathbb{R}^n = n$.

(٢) اساس الفضاء الشعاعي $\mathbb{C}$ على الحقل $\mathbb{R}$ هو $\{1, i\}$ لأن 1 ، i مستقلان خطياً ، وكذلك لكل $z \in \mathbb{C}$ فأن $z = a.1 + bi$ حيث $a, b \in \mathbb{R}$.

3.5.1 نظرية

ليكن V فضاءاً شعاعياً على الحقل K ، $v_1, \dots, v_n$ أشعة من الفضاء الشعاعي V . تشكل مجموعة الأشعة $\{v_1, \dots, v_n\}$ اساساً للفضاء الشعاعي V $\Leftrightarrow$ إذا كان أي شعاع من V يكتب بصورة وحيدة لشكل مزج خطي للأشعة $v_1, \dots, v_n$.

البرهان :

لنفرض ان $\{v_1, \dots, v_n\}$ تشكل أساساً للفضاء الشعاعي V ، وليكن $v \in V$ اي شعاع ، فيكون :

$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ ، حيث $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ ، وإذا فرضنا $v = \lambda'_1 v_1 + \dots + \lambda'_n v_n$ ، حيث $\lambda'_1, \dots, \lambda'_n \in K$ فأن :

$$(\lambda_1 - \lambda'_1) v_1 + \dots + (\lambda_n - \lambda'_n) v_n = 0$$

وبما ان $\{v_1, \dots, v_n\}$ اساس للفضاء الشعاعي V فأن $v_1, \dots, v_n$ مستقلة خطياً ، اي ان $\lambda_1 - \lambda'_1 = 0, \dots, \lambda_n - \lambda'_n = 0$ فأن $\lambda_1 = \lambda'_1, \dots, \lambda_n = \lambda'_n$. اي ان اي شعاع v من الفضاء V يكتب بصورة وحيدة لشكل مزج خطي للأشعة $v_1, \dots, v_n$.

للبرهان على العكس ، لنفرض ان اي شعاع v من V يكتب

بصورة وحيدة لكل مزج خطي للأشعة $v_1 , \ldots , v_n$ ، لتكن $\lambda_1 , \ldots , \lambda_n \in K$ بحيث $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$ وكذلك نعلم أن الشعاع الصفري عبارة عن $0.v_1 + \cdots + 0.v_n = 0$ ، من وحدانية التعبير فإن $\lambda_1 = 0 , \ldots , \lambda_n = 0$ ، أي أن الأشعة $v_1 , \ldots , v_n$ مستقلة خطياً ، ومنه $\{v_1 , \ldots , v_n\}$ عبارة عن أساس للفضاء الشعاعي V . (و.هـ.م.)

4.5.1 تعريف

ليكن V فضاءاً شعاعياً على الحقل K ، نقول عن مجموعة الأشعة $S = \{v_1 , \ldots , v_n\}$ بأنها أقصى مجموعة مستقلة خطياً ، إذا تحقق مايلي :

(1) المجموعة S مستقلة خطياً .

(2) إذا كان لكل $y \in V$ ، $y \notin S$ ، المجموعة $\{v_1 , \ldots , v_n , y\}$ مرتبطة خطياً .

5.5.1 نظرية

ليكن V فضاءاً شعاعياً على الحقل K . ولتكن $S = \{v_1 , \ldots , v_n\}$ مجموعة جزئية من أشعة V ، فإن المجموعة S هي أساس للفضاء V $\Longleftrightarrow$ إذا كانت المجموعة S أقصى مجموعة مستقلة خطياً .

البرهان :

نفرض ان المجموعة S هي اساس للفضاء V ، فأن $v_1, \ldots, v_n$ مستقلة خطياً . وكذلك لكل $y \in V$ و $y \notin S$ توجد $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ بحيث $y = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$ ، أي أن : $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n + (-1)y = 0$ ، لكن $-1 \neq 0$ ، فأن المجموعة $\{v_1, \ldots, v_n, y\}$ مرتبطة خطياً .

للبرهان على العكس ، نفرض ان S أقصى مجموعة مستقلة خطياً . لكل $y \in V$ إذا كان $y \in S$ فأنه يوجد i بحيث $y = v_i$ ، فأن $y = v_i = 0.v_1 + \cdots + 1.v_i + \cdots + 0.v_n$ وإذا كان $y \notin S$ فأن المجموعة $\{v_1, \ldots, v_n, y\}$ مرتبطة خطياً ، فأنه توجد $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1} \in K$ ليست كلها معدومة بحيث $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n + \lambda_{n+1} y = 0$. إذا كان $\lambda_{n+1} = 0$ فأن $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$ ، لكن $v_1, \ldots, v_n$ مستقلة خطياً ، فأن $\lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_n = 0$ ، أي ان $v_1, \ldots, v_n, y$ مستقلة خطياً ، وهذا تناقض ، إذن $\lambda_{n+1} \neq 0$ فأن

$$y = \frac{-\lambda_1}{\lambda_{n+1}} v_1 + \frac{-\lambda_2}{\lambda_{n+1}} v_2 + \cdots + \frac{-\lambda_n}{\lambda_{n+1}} v_n$$

، ومن هنا فأن :

$y = \lambda'_1 v_1 + \cdots + \lambda'_n v_n$. أي أن كل شعاع من V هو مزج خطي للأشعة $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ ، ومنه S عبارة عن اساس للفضاء الشعاعي V .

(و . هـ . م .)

6.5.1 نظرية

كل فضاء شعاعي مولد بعدد منتهي من الاشعة يحتوي على اساس منتهي .

البرهان :

ليكن V فضاءاً شعاعياً على الحقل K ، لنفرض أن الفضاء V مولداً بعدد منتهي من الأشعة $v_1,\dots,v_n$ ، إذا كانت هذه الاشعة مستقلة خطياً ، عندئذ $v_1,\dots,v_n$ تكوّن اساساً للفضاء الشعاعي V .

إذا لم تكن هذه الأشعة مستقلة خطياً ، اي إذا كانت مرتبطة خطياً ، لتكن $v_1,\dots,v_m$ $(m<n)$ اقصى مجموعة جزئية مستقلة خطياً من الاشعة $v_1,\dots,v_n$ ، لذلك فأن الاشعة $v_1,\dots,v_m, v_i$ $(i=m+1,\dots,n)$ مرتبطة خطياً . فتوجد مقادير سلمية $\lambda_1,\dots,\lambda_m, \lambda_i \in K$ ليست كلها معدومة بحيث $\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+\dots+\lambda_m v_m+\lambda_i v_i=0$ ، إذا كان $\lambda_i=0$ فأن: $\lambda_1 v_1+\dots+\lambda_m v_m=0$ ، من كون الأشعة $v_1,\dots,v_m$ مستقلة خطياً ، فأن $\lambda_1=0,\dots,\lambda_m=0$ ، اي ان $\lambda_1,\dots,\lambda_m,\lambda_i$ كلها معدومة ، لذلك $v_1,\dots,v_m, v_i$ مستقلة خطياً . وهذا خلاف للفرض ، اي ان $\lambda_i \neq 0$ $(i=m+1,\dots,n)$ ، فأن $v_i=\frac{-\lambda_1}{\lambda_i}v_1+\dots+\frac{-\lambda_m}{\lambda_i}v_m$ لـ $(i=m+1,\dots,n)$ ، اي ان $v_i=b_1 v_1+\dots+b_m v_m$ ، وبذلك فأن كل مزج خطي للأشعة $v_1,\dots,v_m, v_{m+1},\dots,v_n$ هو مزج خطي للأشعة $v_1,\dots,v_m$ ،

اي ان $v_1, \dots, v_m$ مجموعة تولد الفضاء V ، وهي مستقلة خطياً ، فأن $\{v_1, \dots, v_m\}$ هي عبارة عن اساس للفضاء V.
وبذلك V تحتوي على اساس منتهي .

(و . هـ . م .)

مباشرة من برهان النظرية هذه نستنتج :

(١) إذا كان الفضاء الشعاعي V على الحقل K مولداً بعدد منتهي من الاشعة $v_1, \dots, v_n$ ، وكانت الاشعة $\{v_1, \dots, v_m\}$ اساساً للفضاء الشعاعي V ، فأن $m \leq n$.

(٢) إذا كانت الأشعة $v_1, \dots, v_n$ تولد الفضاء الشعاعي V وكانت $u_1, \dots, u_m$ مستقلة خطياً فأن $m \leq n$.

(3) إذا كانت $v_1, \dots, v_n$ ، $u_1, \dots, u_m$ أساسين للفضاء الشعاعي V على الحقل K ، فأن $m = n$.

(4) إذا كان V بعده n ، فأن أي n أشعة مستقلة خطياً تكون اساساً لـ V.

7.5.1 نظرية

ليكن V فضاءاً شعاعياً على الحقل K ، ذا بعد منته n ، ولتكن $v_1, \dots, v_p$ اشعة من V مستقلة خطياً حيث $p < n$ ، فيمكن ايجاد اشعة $v_{p+1}, \dots, v_n$ بحيث ان الاشعة $v_1, \dots, v_p, v_{p+1}, \dots, v_n$ تكون اساساً للفضاء V .

[اي ان اي مجموعة من p اشعة مستقلة خطياً ، يمكن تكملتها الى اساس في فضاء شعاعي ذي بعد n $(p<n)$].

البرهان :

لتكن $\{u_1, \ldots, u_n\}$ اي اساس للفضاء الشعاعي V على الحقل K. اذا كانت كل من $u_1, \ldots, u_n$ مزجاً خطياً للأشعة $v_1, \ldots, v_p$ عندئذ الفضاء الشعاعي V يكون مولداً بالأشعة $v_1, \ldots, v_p$ ، وكذلك $u_1, \ldots, u_n$ مستقلة خطياً فأن $n \leq p$ ، لكن حسب الفرض $p < n$ وهذا تناقض، اي انه توجد بين الاشعة $u_1, \ldots, u_n$ على الأقل شعاع واحد لا يكون مزجاً خطياً للأشعة $v_1, \ldots, v_p$ وليكن u_{i_1}. لنفرض ان $\lambda, \lambda_1, \ldots, \lambda_p \in K$ بحيث $\lambda u_{i_1} + \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p = 0$ ، اذا كان $\lambda = 0$ فأن $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p = 0$ ، لكن $v_1, \ldots, v_p$ مستقلة خطياً ، فأن $\lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_p = 0$ ، اي ان من $\lambda u_{i_1} + \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p = 0$ نستنتج ان $\lambda = 0, \lambda_1 = 0 \ldots, \lambda_p = 0$ ، اي ان الاشعة $u_{i_1}, v_1, \ldots, v_p$ مستقلة خطياً . اذا كان $\lambda \neq 0$ فيكون :

$$u_{i_1} = \frac{-\lambda_1}{\lambda} v_1 + \cdots + \frac{-\lambda_p}{\lambda} v_p$$

اي ان u_{i_1} مزج خطي للأشعة $v_1, \ldots, v_p$ ، وهذا خلاف فرضنا. اي ان الاشعة $u_{i_1}, v_1, \ldots, v_p$ مستقلة خطياً . وهكذا حصلنا على $p+1$ من الاشعة المستقلة خطياً . اذا كانت $p+1 < n$ ، بنفس الطريقة يوجد شعاع واحد بين الاشعة $u_1, \ldots, u_n$ ، فلاً u_{i_2} بحيث لا يكون مزجاً خطياً للأشعة $u_{i_1}, v_1, \ldots, v_p$ ، ونضيف هذا الشعاع ونحصل على $p+2$ شعاع وهكذا الى ان نحصل على n من الاشعة المستقلة خطياً، وبما ان بعد الفضاء V هو n ، فأن المجموعة التي نحصل عليها تحوي n اشعة مستقلة هي اساس . اي أننا

كملنا الأشعة $v_p, \dots, v_1$ الى اساس .

(و. هـ. م.)

8.5.1 نظرية

ليكن V فضاءاً شعاعياً ذا بعد منتهي n على الحقل K ، وليكن F فضاءاً شعاعياً جزئياً من الفضاء V فأن :

(1) $\dim F \leq \dim V$

(2) اذا كان $\dim V = \dim F$ فأن $F = V$.

البرهان :

(1) F فضاء شعاعي ببعد منته لأنه فضاء شعاعي جزئي من الفضاء V . لتكن $\{v_1, \dots, v_p\}$ اساساً للفضاء F ، فأن هذه الأشعة مستقلة خطياً ، حسب النظرية (7.5.1) يمكن تكملتها الى اساس ، اي يمكن ايجاد اشعة $v_{p+1}, \dots, v_n$ بحيث $v_1, \dots, v_p, v_{p+1}, \dots, v_n$ تكون اساساً للفضاء V، فينتج ان $p \leq n$ ، اي ان $\dim F \leq \dim V$.

(2) اذا كان $n = p$ ، فأن هذا يعني أن الفضاءين الشعاعيين V ، F مولدان بنفس الاشعة ، فأن $F = V$.

(و. هـ. م.)

9.5.1 نظرية

ليكن V_1 ، V_2 فضاءين شعاعيين جزئيين من الفضاء الشعاعي V على الحقل K ، فأن:

$$\dim(V_1+V_2)+\dim(V_1\cap V_2)=\dim V_1+\dim V_2$$

البرهان:

لتكن $\{v_1,\dots,v_p\}$ أساساً للفضاء الشعاعي $V_1\cap V_2$ ،
اي ان $\dim(V_1\cap V_2)=p$ ، نعلم ان $V_1\cap V_2\subset V_1$ ، $V_1\cap V_2\subset V_2$
حسب النظرية (7.5.1) يمكن تكملة $\{v_1,\dots,v_p\}$ الى
اساس للفضاء V_1 ، والى اساس للفضاء V_2 ، اي
انه توجد الاشعة $v'_{p+1},\dots,v'_r$ من الفضاء V_1 بحيث
$\{v_1,\dots,v_p,v'_{p+1},\dots,v'_r\}$ تكون اساساً للفضاء V_1 ،
وكذلك توجد الأشعة $v''_{p+1},\dots,v''_s$ من الفضاء V_2 بحيث
$\{v_1,\dots,v_p,v''_{p+1},\dots,v''_s\}$ تكون اساساً للفضاء V_2 فأن:
$\dim V_1=r$ و $\dim V_2=s$. لكل $h\in V_1+V_2$ ، فأن
$h=y+z$ حيث $y\in V_1$ ، $z\in V_2$ ، فأنه توجد مقادير
سلمية $\alpha_1,\dots,\alpha_p,\dots,\alpha_r$ ، $\beta_1,\dots,\beta_p,\dots,\beta_s$ في K بحيث:

$$y=\alpha_1v_1+\dots+\alpha_pv_p+\alpha_{p+1}v'_{p+1}+\dots+\alpha_rv'_r$$
$$z=\beta_1v_1+\dots+\beta_pv_p+\beta_{p+1}v''_{p+1}+\dots+\beta_sv''_s$$

فأن:

$$h=(\alpha_1+\beta_1)v_1+\dots+(\alpha_p+\beta_p)v_p+\alpha_{p+1}v'_{p+1}+\dots+\alpha_rv'_r+\beta_{p+1}v''_{p+1}+\dots+\beta_sv''_s$$

اي ان كل شعاع من V_1+V_2 ، هو مزج خطي للأشعة التالية:

$v_1, \ldots, v_p, v'_{p+1}, \ldots, v'_r, v''_{p+1}, \ldots, v''_s$

الاتية مقادير سلمية $c_1, \ldots, c_p, c_{p+1}, \ldots, c_r, c_{r+1}, \ldots, c_{r+s-p} \in K$

فإذا كانت :

$$c_1 v_1 + \cdots + c_p v_p + c_{p+1} v'_{p+1} + \cdots + c_r v'_r + c_{r+1} v''_{p+1} + \cdots + c_{r+s-p} v''_s = 0$$

فأنه :

$$x = c_{r+1} v''_{p+1} + \cdots + c_{r+s-p} v''_s = -(c_1 v_1 + \cdots + c_p v_p + c_{p+1} v'_{p+1} + \cdots + c_r v'_r)$$

لكن $\{v_1, \ldots, v_p, v'_{p+1}, \ldots, v'_r\}$ هي اساس للفضاء الشعاعي V_1 ، وكذلك $v''_{p+1}, \ldots, v''_s$ هي اشعة من الفضاء V_2 فأنه $x \in V_1$ ، $x \in V_2$ ومنه $x \in V_1 \cap V_2$. لكن الأشعة $v_1, \ldots, v_p$ هي اساس للفضاء $V_1 \cap V_2$ فأنه :

$x = d_1 v_1 + \cdots + d_p v_p$ حيث $d_1, \ldots, d_p \in K$ ، من هنا فأنه

$$d_1 v_1 + \cdots + d_p v_p = c_{r+1} v''_{p+1} + \cdots + c_{r+s-p} v''_s$$

ايضاً :

$$d_1 v_1 + \cdots + d_p v_p - c_{p+1} v''_{p+1} - \cdots - c_{r+s-p} v''_s = 0$$

لكن بما أن الأشعة $v_1, \ldots, v_p, v''_{p+1}, \ldots, v''_s$ مستقلة خطياً ، فأنه $d_1 = \cdots = d_p = c_{r+1} = \cdots = c_{r+s-p} = 0$ ، من هنا نستنتج أن $c_1 = \cdots = c_r = 0$ ، أيضاً أن الأشعة $v_1, \ldots, v_p, v'_{p+1}, \ldots, v'_r, v''_{p+1}, \ldots, v''_s$ مستقلة خطياً ، أي أنها عبارة عن أساس للفضاء $V_1 + V_2$ ، ومنه $\dim(V_1 + V_2) = r + s - p$ فأنه :

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$$

ومنه

$$\dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$$

(و . هـ . م .)

نظرية 10.5.1

ليكن V_1 ، V_2 فضاءين شعاعيين جزئيين من الفضاء الشعاعي V على الحقل K ، بحيث $V = V_1 \oplus V_2$ فأن :
$\dim V = \dim V_1 + \dim V_2$.

البرهان :

إذا كان $V = V_1 \oplus V_2$ ، فأن $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ ، وكذلك $V = V_1 + V_2$.
اي ان $\dim(V_1 \cap V_2) = 0$ و $\dim V = \dim(V_1 + V_2)$ ، لكن
حسب النظرية (9.5.1)

$$\dim(V_1+V_2) + \dim(V_1 \cap V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$$

فأن : $\dim V = \dim(V_1+V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$

(و . هـ . م) .

نظرية 11.5.1

ليكن V_1 ، V_2 فضاءين شعاعيين ، ببعدين n ، m على التوالي على الحقل K فأن :

$$\dim(V_1 \times V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$$

البرهان :

لتكن $\{v_1, \ldots, v_n\}$ أساساً للفضاء V_1 ، $\{u_1, \ldots, u_m\}$ للفضاء V_2 ، نبرهن $\{(v_1,0), \ldots, (v_n,0), (0,u_1), \ldots, (0,u_m)\}$
هي اساس لـ $V_1 \times V_2$.

$$\forall v \in V_1 \times V_2 , \quad v = (\alpha, \beta) = (\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n \ , \ \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_m u_m)$$

$$= \alpha_1(v_1,0) + \cdots + \alpha_n(v_n,0) + \beta_1(0,u_1) + \cdots + \beta_m(0,u_m)$$

كذلك الأسرة مستقلة خطياً إذا كانت $\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta_1,\ldots,\beta_m \in K$ مقادير سلمية :

$$\alpha_1(v_1,0) + \cdots + \alpha_n(v_n,0) + \beta_1(0,u_1) + \cdots + \beta_m(0,u_m) = (0,0)$$

فأن :

$$(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n \;,\; \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_m u_m) = (0,0)$$

اي ان : $\beta_1 u_1 + \cdots + \beta_m u_m = 0$ و $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$

فأن $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$ ، لأن الاشعة $v_1,\ldots,v_m$ مستقلة خطياً ،

و $\beta_1 = \cdots = \beta_m = 0$ لأن الاشعة $u_1,\ldots,u_m$ مستقلة خطياً.

اي ان $\{(v_1,0),\ldots,(v_n,0),(0,u_1),\ldots,(0,u_m)\}$ هي اساس

للفضاء الشعاعي $V_1 \times V_2$ ، ومنه $\dim(V_1 \times V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$

(و . ه . م .)

تمارين

(1) بين أياً من المجموعات التالية V، عبارة عن فضاء شعاعي على الحقل المذكور K بالنسبة للعمليتين المعرفتين :-

(a) لتكن $K=V=\mathbb{R}$ ولتكن عملية الجمع معرفة كالآتي:

$$\forall x,y\in\mathbb{R}\ ,\quad x\oplus y = 2x+2y$$

والضرب بمقدار سلمي يكون معرفاً كالآتي :

$$\forall\lambda\in\mathbb{R}\ ,\ \forall x\in\mathbb{R}\ ,\quad \lambda\odot x=\lambda x$$

(b) لتكن $V=F(\mathbb{R},\mathbb{R})$ حيث $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$ عبارة عن مجموعة جميع التطبيقات من $\mathbb{R}$ في $\mathbb{R}$ وليكن $K=\mathbb{R}$.

لتكن عملية الجمع معرفة كالآتي :

$$\forall f,g\in F(\mathbb{R},\mathbb{R})\ ,\ \forall x\in\mathbb{R}\ ,\ (f+g)(x)=f(x)+g(x)$$

والضرب بمقدار سلمي يكون معرفاً كالآتي :

$$\forall\lambda\in\mathbb{R}\ ,\ \forall f\in F(\mathbb{R},\mathbb{R})\ ,\ \forall x\in\mathbb{R}\ ,\ (\lambda f)(x)=\lambda f(x)$$

(c) لتكن $V=\{(a,b)\ :\ a,b\in\mathbb{R}\}$ و $K=\mathbb{R}$. ولتكن عملية الجمع معرفة كالآتي :

$$\forall (a,b),(c,d)\in V\ ,\ (a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$$

والضرب بمقدار سلمي يكون معرفاً كالآتي :

$$\forall\lambda\in\mathbb{R}\ ,\ \forall (a,b)\in V\ ,\ \lambda(a,b)=(\lambda a,b)$$

(2) أي من المجموعات الجزئية A هي فضاء شعاعي جزئي من الفضاء الشعاعي V على الحقل K .

(a) $V=\mathbb{R}^3\ ,\ K=\mathbb{R}\ ,\quad A=\{(a,b,c)\ :\ a^2+b^2+c^2\leq 1\}$

(b) $A=\{(0,y,z) : y,z\in \mathbb{R}\}$ ، $K=\mathbb{R}$ ، $V=\mathbb{R}^3$

(c) $A=\{f\in F(\mathbb{R},\mathbb{R})$: عبارة عن تطبيق مستمر $f\}$ ، $K=\mathbb{R}$ ،
$V=F(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

(d) $A=\{f\in F(\mathbb{R},\mathbb{R}) : \forall x\in\mathbb{R} , -f(x)=f(-x)\}$ ، $K=\mathbb{R}$ ،
$V=F(\mathbb{R},\mathbb{R})$

(3) ليكن V فضاءاً شعاعياً على الحقل K ، ولتكن
(a) $V_1=\{(x,0) : x\in V\}$ ، $V_2=\{(0,y) : y\in V\}$ فضاءين شعاعيين جزئيين من الفضاء الشعاعي V^2 على الحقل K ، برهن ان $V^2=V_1\oplus V_2$.

(b) إذا كان $V_1=\{(0,y,z) : y,z\in\mathbb{R}\}$ ، $V_2=\{(x,y,0) : x,y\in\mathbb{R}\}$ فضاءان شعاعيان جزئيان من الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^3$ على الحقل $\mathbb{R}$. فهل ان $\mathbb{R}^3=V_1\oplus V_2$ ؟ وضح ذلك .

(4) اكتب الشعاع $v=(1,-2,5)$ بشكل مزج خطي للأشعة $v_1=(1,1,1)$ ، $v_2=(1,2,3)$ ، $v_3=(2,-1,1)$.

(5) في الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^3$ على الحقل $\mathbb{R}$ ، اثبت ان الأشعة $v_1=(1,2,-1)$ ، $v_2=(1,3,0)$ ، $v_3=(1,3,-1)$ مستقلة خطياً.
ثم أثبت ان الشعاع $v=(7,14,-1)$ عبارة عن مزج خطي للأشعة v_1 ، v_2 ، v_3 .

(6) في الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^3$ على الحقل $\mathbb{R}$ ، اثبت ان الأشعة $v_1=(1,2,3)$ ، $v_2=(3,2,1)$ ، $v_3=(4,4,5)$ مستقلة خطياً .

(7) ما هي القيمة التي يجب أعطاؤها للعنصر a ، لكي تكون الاشعة $v_1=(1,2,3,1)$ ، $v_2=(0,3,-1,2)$ ، $v_3=(1,0,3,-4)$ ، $v_4=(2,5,a,-1)$ في الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^4$ على الحقل $\mathbb{R}$ مرتبطة خطياً .

(8) لتكن $v_1,\dots,v_n$ اشعة مستقلة خطياً في الفضاء الشعاعي V على الحقل K . برهن ان الأشعة $u_1,\dots,u_n$ المعرفة بالشكل التالي : $u_1=v_1$ ، $u_2=v_1+v_2$ ، ... ، $u_n=v_1+\dots+v_n$ مستقلة خطياً .

(9) في الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^n$ على الحقل $\mathbb{R}$ أثبت أن الأشعة :

$$X_1=(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n})$$
$$X_2=(0, x_{22}, \dots, x_{2n})$$
$$\vdots$$
$$X_i=(0,0,\dots, x_{ii}, \dots, x_{in})$$
$$\vdots$$
$$X_n=(0,0,\dots,0, x_{nn})$$

حيث $x_{ii}\neq 0$ لكل $i=1,\dots,n$ ، مستقلة خطياً .

(10) اكتب كثيرة الحدود $v = 3t^2 + 8t - 5$ كمزيج خطي لكثيرات الحدود : $v_1 = 2t^2 + 3t - 4$ ، $v_2 = t^2 - 2t - 3$.

(11) في الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^3$ على الحقل $\mathbb{R}$ ، في أي حالة تكون مجموعة الأشعة $\{v_1, v_2, v_3\}$ أساساً لذلك الفضاء .

(a) $v_1 = (1,0,0)$ ، $v_2 = (1,1,0)$ ، $v_3 = (3,-1,1)$

(b) $v_1 = (3,1,2)$ ، $v_2 = (2,1,2)$ ، $v_3 = (-1,2,5)$

(c) $v_1 = (1,1,0)$ ، $v_2 = (0,1,1)$ ، $v_3 = (1,2,1)$

(12) اوجد اساس للفضاء الشعاعي الجزئي

$$V_1 = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0 \}$$

في الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^3$ على الحقل $\mathbb{R}$.

(13) اوجد بعد الفضاء الشعاعي V على الحقل $\mathbb{R}$ في كل مما يلي :

(a) $V = \{ (x_1, x_2, x_3) : x_1 = -2x_2 , x_3 = x_2 , x_i \in \mathbb{R} \}$

(b) $V = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_3 + x_4 = 0 \}$

(c) $V = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + 2x_2 - x_4 = 0 , 2x_3 - x_4 = 0 \}$

(14) ليكن V فضاءاً شعاعياً على الحقل K بعده 6، وليكن V_1 ، V_2 فضاءين شعاعيين جزئيين بعد كل منهما 4 ، $V_1 \neq V_2$. اوجد الأبعاد الممكنة للفضاء $V_1 \cap V_2$.

(15) لتكن $\{v_1,\ldots,v_r, w_1,\ldots,w_s\}$ مجموعة مستقلة خطياً في الفضاء الشعاعي V على الحقل K ، وليكن V_1 الفضاء الشعاعي المولد بالأشعة $\{v_1,\ldots,v_r\}$ ، V_2 الفضاء الشعاعي المولد بالأشعة $\{w_1,\ldots,w_s\}$ برهن أن $V_1 \cap V_2 = \{0\}$.

(16) ليكن $\mathbb{R}^4$ فضاءً شعاعياً على الحقل $\mathbb{R}$ ، ولتكن

$$A=\{(1,1,0,0)\ ,\ (0,1,1,0)\ ,\ (0,0,1,1)\}$$

$$B=\{(1,0,1,0)\ ,\ (0,2,1,1)\}$$

وإذا كان $V_1=[A]$ ، $V_2=[B]$.

(a) ما هو الشكل الذي يكتب بها عناصر V_1 وعناصر V_2.

(b) اوجد $\dim V_1$ ، $\dim V_2$.

(c) أوجد اساس لـ $V_1 \cap V_2$.

(d) هل $\mathbb{R}^4 = V_1 \oplus V_2$ ؟

(17) في الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^4$ على الحقل $\mathbb{R}$ اوجد أساس الفضاء الشعاعي المولد بالأشعة .

$$\{v_1=(1,0,2,3)\ ,\ v_2=(7,4,-2,-1)\ ,\ v_3=(5,2,4,7)\ ,\ v_4=(3,2,0,1)\}$$

(18) ليكن V_1 فضاءً شعاعياً جزئياً من الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^4$ على الحقل $\mathbb{R}$ مولداً بالأشعة: $v_1=(2,2,1,0)$ ، $v_2=(1,4,2,-1)$ ، $v_3=(2,1,-1,0)$ ، $v_4=(2,-5,-4,2)$ ، وليكن V_2 فضاءً شعاعياً جزئياً اخراً من الفضاء $\mathbb{R}^4$ مولداً بالأشعة : $u_1=(2,1,4,5)$

. $u_2=(1,2,3,4)$

(a) أوجد أساس لـ V_1 ، V_2 .

(b) أوجد $\dim(V_1 \cap V_2)$.

(c) أوجد $\dim(V_1 + V_2)$.

(d) اكمل اساس V_1 الى اساس لـ $\mathbb{R}^4$.

(19) ليكن V فضاءً شعاعياً على الحقل K ، وليكن $V_1, \ldots, V_m$ فضاءات شعاعية جزئية من V ، بحيث $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$. وإذا كانت $\{u_{11}, \ldots, u_{n_1 1}\}$ اساساً في V_1 ، $\{u_{12}, \ldots, u_{n_2 2}\}$ اساساً في V_2 ، - - - - ، $\{u_{1m}, \ldots, u_{n_m m}\}$ اساساً في V_m . برهن ان المجموعة $\{u_{11}, \ldots, u_{n_1 1}, u_{12}, \ldots, u_{n_2 2}, \ldots, u_{1m}, \ldots, u_{n_m m}\}$ هي اساس في الفضاء V .

الفصل الثاني
التطبيقات الخطية

1.2 مبادئ أولية

1.1.2 تعريف

ليكن V_1 ، V_2 فضاءين شعاعيين على نفس الحقل K ، وليكن f تطبيقاً من V_1 في V_2 . فنقول ان f هو تطبيق خطي من V_1 في V_2 إذا تحقق الشرطين التاليين :

$$\forall v_1, v_2 \in V_1, \quad f(v_1+v_2) = f(v_1) + f(v_2) \qquad (1)$$

$$\forall v \in V_1, \quad \forall \lambda \in K, \quad f(\lambda v) = \lambda f(v) \qquad (2)$$

ويمكن كتابة الشرطين في شرط واحد كالآتي :

$$\forall v_1, v_2 \in V_1, \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in K, \quad f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2)$$

2.1.2 أمثلة

(1) ليكن V_1 ، V_2 فضاءين شعاعيين على نفس الحقل K ، f تطبيقاً من الفضاء V_1 في الفضاء V_2 ، معرفاً كالآتي $\forall x \in V_1, f(x) = 0$. فأن f عبارة عن تطبيق خطي ، حيث

$$\forall x, y \in V_1, \quad f(x+y) = 0 = 0+0 = f(x) + f(y)$$

$$\forall \lambda \in K, \quad \forall x \in V_1, \quad f(\lambda x) = 0 = \lambda . 0 = \lambda f(x)$$

وتسمي التطبيق الخطي من هذا النوع ، بالتطبيق الصفري ونرمز له بالرمز f_0.

(2) ليكن $\mathbb{R}^2$ ، $\mathbb{R}^3$ فضاءين شعاعيين على نفس الحقل $\mathbb{R}$،
و $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ تطبيقاً معرفاً كالآتي :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad , \quad f(x,y,z) = (x-y \; , \; y-z)$$

فإن f عبارة عن تطبيق خطي لأنه:

$$\forall (x,y,z),(x_1,y_1,z_1) \in \mathbb{R}^3 \quad , \quad f((x,y,z)+(x_1,y_1,z_1)) =$$
$$= f(x+x_1 \; , \; y+y_1 \; , \; z+z_1) = (x+x_1-(y+y_1) \; , \; y+y_1-(z+z_1))$$
$$= (x-y+x_1-y_1 \; , \; y-z+y_1-z_1) = (x-y \; , \; y-z) + (x_1-y_1 \; , \; y_1-z_1)$$
$$= f(x,y,z) + f(x_1,y_1,z_1)$$

وأنه $\forall \lambda \in \mathbb{R} \; , \; \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; , \; f(\lambda(x,y,z)) = f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) =$

$$= (\lambda x - \lambda y \; , \; \lambda y - \lambda z) = (\lambda(x-y) \; , \; \lambda(y-z)) = \lambda(x-y \; , \; y-z)$$
$$= \lambda f(x,y,z) \, .$$

نسمي التطبيق الخطي $f: V_1 \to V_2$ ايزومورفيزماً إذا كان تقابلاً .

إذا كان 0_1 هو العنصر الحيادي في الفضاء الشعاعي V_1 ، 0_2 هو العنصر الحيادي في الفضاء الشعاعي V_2 ، و f تطبيقاً خطياً للفضاء الشعاعي V_1 في الفضاء V_2 فإن :

$$\forall v \in V_1 \quad , \quad v + 0_1 = 0_1 + v = v$$
$$f(v) = f(v+0_1) = f(0_1+v)$$

لكن f خطي فإن : $f(v) = f(v) + f(0_1)$

بما أن $f(v) \in V_2$ فإن : $f(v) = f(v) + 0_2$

فإن : $f(v) + f(0_1) = f(v) + 0_2$

بما ان كل عنصر منتظم بالنسبة للجمع في الفضاء الشعاعي فأن:

$$f(0_1) = 0_2$$

وكذلك :

$$\forall v \in V_1 \ , \quad f(-v) = f(-v) + (f(v) + (-f(v)))$$
$$= (f(-v) + f(v)) + (-f(v))$$
$$= f((-v) + v) + (-f(v))$$
$$= f(0_1) + (-f(v)) = 0_2 + (-f(v)) = -f(v)$$

فأن : $\forall v \in V_1 \ , \quad f(-v) = -f(v)$

3.1.2 نظرية

تركيب التطبيقات الخطية يكون تطبيقاً خطياً .

البرهان :

ليكن V_1 ، V_2 ، V_3 ثلاثة فضاءات شعاعية على نفس الحقل K . وليكن $f: V_1 \to V_2$ ، $g: V_2 \to V_3$ تطبيقين خطيين ، نبرهن ان $h = g \circ f : V_1 \to V_3$ عبارة عن تطبيق خطي من V_1 في V_3 .

$$\forall v_1, v_2 \in V_1 \ , \ \forall \lambda_1, \lambda_2 \in K \ , \quad h(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = (g \circ f)(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)$$
$$= g[f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)]$$

بما ان f تطبيق خطي فأن :

$$g[f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)] = g[\lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2)]$$

وبما ان g تطبيق خطي فأن :

$$g[\lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2)] = \lambda_1 g(f(v_1)) + \lambda_2 g(f(v_2))$$

$$= \lambda_1 (g \circ f)(v_1) + \lambda_2 (g \circ f)(v_2) = \lambda_1 h(v_1) + \lambda_2 h(v_2)$$

(و.هـ.م.)

2.2 صورة ونواة التطبيق الخطي

1.2.2 تعريف

ليكن V_1، V_2 فضاءين شعاعيين على نفس الحقل K، وليكن f تطبيقاً خطياً للفضاء الشعاعي V_1 في الفضاء الشعاعي V_2. نسمي مجموعة العناصر $x \in V_1$ والتي تحقق $f(x) = 0_2$، لنواة التطبيق الخطي f، ونرمز لها بالرمز $Ker f$ اي ان:

$$Ker f = \{ x \in V_1 : f(x) = 0_2 \} = f^{-1}(0_2)$$

ونسمي مجموعة العناصر $y \in V_2$ والتي هي صور لعناصر من V_1 بصورة f ونرمز لها بالرمز $Im f$، اي ان:

$$Im f = \{ y \in V_2 : \exists x \in V_1 , f(x) = y \} .$$

2.2.2 نظرية

ليكن V_1، V_2 فضاءين شعاعيين على نفس الحقل K، وليكن f تطبيقاً خطياً للفضاء V_1 في الفضاء V_2 فأن:

(1) $Ker f$ عبارة عن فضاء شعاعي جزئي من الفضاء الشعاعي V_1.

(2) $Im f$ عبارة عن فضاء شعاعي جزئي من الفضاء V_2.

(3) f يكون متباينا $\Leftrightarrow$ $Ker f = \{0_1\}$.

البرهان :

(1) $\forall x,y \in Ker f \quad , \quad f(x)=0_2 \quad , \quad f(y)=0_2$

لذلك فأن:

$$f(x)-f(y)=0_2 \Longrightarrow f(x-y)=0_2 \Longrightarrow x-y \in Ker f$$

وكذلك

$$\forall \lambda \in K \quad , \forall x \in Ker f \quad , \quad f(x)=0_2$$

$$f(\lambda x)=\lambda f(x) = \lambda . 0_2 = 0_2 \Rightarrow \lambda x \in Ker f$$

ومنه نستنتج ان $Ker f$ فضاء شعاعي جزئي من الفضاء الشعاعي V_1 على الحقل K .

(2) $\forall y_1, y_2 \in Im f \quad , \exists x_1, x_2 \in V_1 \quad , \quad f(x_1)=y_1 \; , \; f(x_2)=y_2$

$$y_1-y_2 = f(x_1)-f(x_2) = f(x_1-x_2)$$

لكن $x_1-x_2 \in V_1$ ، فأن : $y_1-y_2 \in Im f$

وكذلك :

$$\forall \lambda \in K \; , \; \forall y \in Im f \; , \exists x \in V_1 \quad , \quad f(x)=y$$

$$\lambda y = \lambda f(x) = f(\lambda x)$$

لكن $\lambda x \in V_1$ ، فأن : $\lambda y \in Im f$ ، ومنه $Im f$ فضاء شعاعي جزئي من الفضاء الشعاعي V_2 على الحقل K .

(3) لنفرض f متباين ، فأنه لكل $x \in Ker f$ ، $f(x)=0_2$.

لكن $f(0_1)=0_2$ ، فأن $f(x)=f(0_1)$ ، بما ان f متباين

فأن $x=0_1$. اي ان $Ker f=\{0_1\}$.

نفرض الآن $Ker f=\{0_1\}$ ، ولنفرض انه لكل $x,y \in V_1$ ، $f(x)=f(y)$.

فان : $f(x)-f(y)=0_2 \Rightarrow f(x-y)=0_2 \Rightarrow x-y \in Ker f$

لكن $Ker f = \{0_1\}$ ، فمنه $x - y = 0_1$. اي ان $x = y$ ، وبذلك
f متباين .

(و.هـ.م.)

3.2.2 نظرية

ليكن V_1 ، V_2 فضاءين شعاعيين على نفس الحقل K ،
وليكن $f : V_1 \to V_2$ ايزومورفيزما ، فأن $f^{-1} : V_2 \to V_1$ عبارة عن
ايزومورفيزم .

البرهان :

لكل $v_1, v_2 \in V_2$ يوجد $u_1, u_2 \in V_1$ بحيث $f(u_1) = v_1$ ، $f(u_2) = v_2$
فأن $f^{-1}(v_1) = u_1$ ، $f^{-1}(v_2) = u_2$ من هنا فأن :

$$f^{-1}(v_1 + v_2) = f^{-1}(f(u_1) + f(u_2)) = f^{-1}(f(u_1 + u_2)) = (f^{-1} \circ f)(u_1 + u_2)$$

$$= u_1 + u_2 = f^{-1}(v_1) + f^{-1}(v_2)$$

وكذلك : $\forall \lambda \in K , \forall v \in V_2 \quad , \quad f^{-1}(\lambda v) = f^{-1}(\lambda f(u)) =$

$$= f^{-1}(f(\lambda u)) = (f^{-1} \circ f)(\lambda u) = \lambda u = \lambda f^{-1}(v)$$

فأن f^{-1} تطبيق خطي للفضاء V_2 في الفضاء V_1 .

لكل $v_1, v_2 \in V_2$ يوجد $u_1, u_2 \in V_1$ بحيث $f(u_1) = v_1$ ، $f(u_2) = v_2$
فأنه اذا كان $f^{-1}(v_1) = f^{-1}(v_2)$ فأن $u_1 = u_2$ ، ومنه نستنتج
$f(u_1) = f(u_2)$ فأن $v_1 = v_2$ ومنه f^{-1} متباين .

ونلاحظ انه لكل $u \in V_1$ يوجد $v \in V_2$ بحيث $f(u) = v$ ،
ومنه $f^{-1}(v) = u$ فأن f^{-1} غامر . نستنتج ان f^{-1}
ايزومورفيزم .

(و.هـ.م.)

4.2.2 نظرية

الصورة العكسية لفضاء شعاعي جزئي عبارة عن فضاء شعاعي جزئي.

البرهان :

ليكن V_1 ، V_2 فضاءين شعاعيين على نفس الحقل K ، $f : V_1 \to V_2$ تطبيقاً خطياً. وليكن F فضاءً شعاعياً جزئياً من الفضاء V_2 ، لنبرهن أن $f^{-1}(F)$ هو فضاء شعاعي جزئي من الفضاء الشعاعي V_1 .

$$\forall v_1, v_2 \in f^{-1}(F) \quad \exists\, u_1, u_2 \in F \ , \quad f(v_1) = u_1 \ , \ f(v_2) = u_2 \ ,$$

$$f(v_1 - v_2) = f(v_1) - f(v_2) = u_1 - u_2 \in F \implies v_1 - v_2 \in f^{-1}(F)$$

وكذلك

$$\forall \lambda \in K \ , \ \forall v_1 \in f^{-1}(F) \ \exists\, u_1 \in F \ , \ f(v_1) = u_1 \ , \ f(\lambda v_1) =$$

$$= \lambda f(v_1) = \lambda u_1 \in F \implies \lambda v_1 \in f^{-1}(F) \ .$$

(و.هـ.م.)

3.2 الأساس والتطبيق الخطي

1.3.2 نظرية

ليكن V_1 فضاءً شعاعياً على الحقل K ، ذا بعد منتهي n ، ولتكن $\{v_1, \ldots, v_n\}$ أساساً للفضاء الشعاعي V_1 . وليكن V_2 فضاءً شعاعياً على الحقل K ، $u_1, \ldots, u_n$ أشعة ما من الفضاء V_2 ، فأنه ليوجد تطبيق خطي وحيد $f : V_1 \to V_2$ ، بحيث

يكون $f(v_i) = u_i$ لكل $i = 1, \dots, n$.

البرهان :

كل شعاع من V_1 يمكن كتابته بشكل مزج خطي لأشعة الاساس ، اي انه لكل $v \in V_1$ توجد مقادير سلمية $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ بحيث $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$.

نعرف $f : V_1 \to V_2$ كمايلي :

$$\forall v \in V_1 \ , \ f(v) = f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n)$$
$$= \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n$$

$$\forall u, v \in V_1 \quad \exists \ \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K \ , \ \exists \ \beta_1, \dots, \beta_n \in K$$

بحيث $u = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \quad , \quad v = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n$

فان
$$f(u+v) = f[(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) + (\beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n)]$$
$$= f[(\alpha_1 + \beta_1) v_1 + \dots + (\alpha_n + \beta_n) v_n]$$
$$= (\alpha_1 + \beta_1) u_1 + \dots + (\alpha_n + \beta_n) u_n$$
$$= (\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n) + (\beta_1 u_1 + \dots + \beta_n u_n)$$
$$= f(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) + f(\beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n)$$
$$= f(u) + f(v)$$

$$\forall \lambda \in K \ ; \ \forall v \in V_1 \ , \ f(\lambda v) = f(\lambda(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n))$$
$$= f(\lambda \alpha_1 v_1 + \dots + \lambda \alpha_n v_n) = \lambda \alpha_1 u_1 + \dots + \lambda \alpha_n u_n$$
$$= \lambda(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n) = \lambda f(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = \lambda f(v)$$

لذلك نستنتج ان f تطبيق خطي . واضح من تعريف f ان $f(v_i) = u_i$ لكل $i = 1, \dots, n$.

إذا كان g أي تطبيق خطي آخر من V_1 في V_2 ، بحيث $g(v_i)=u_i$ لكل $i=1,\dots,n$ فأنه :

$$\forall v\in V_1 \ , \ g(v)= g(\alpha_1 v_1+\dots+\alpha_n v_n) = \alpha_1 g(v_1)+\dots+\alpha_n g(v_n)$$
$$= \alpha_1 u_1+\dots+\alpha_n u_n = \alpha_1 f(v_1)+\dots+\alpha_n f(v_n)$$
$$= f(\alpha_1 v_1+\dots+\alpha_n v_n) = f(v)$$

ومنه $f=g$ و f وحيد .

(و . هـ . م .)

2.3.2 نتيجة

ليكن V_1 فضاءً شعاعياً على الحقل K ، لبعده n ولتكن $\{v_1,\dots,v_n\}$ اساساً في V_1 . وليكن V_2 فضاءً شعاعياً على نفس الحقل K ، $u_1,\dots,u_n$ اشعة ما من الفضاء V_2 ، وليكن $f: V_1\to V_2$ تطبيقاً خطياً بحيث $f(v_i)=u_i$ لكل $i=1,\dots,n$ فأن :

(1) f يكون متبايناً $\Leftrightarrow$ إذا كانت $u_1,\dots,u_n$ مستقلة خطياً .

(2) f يكون غامراً $\Leftrightarrow$ إذا كانت $u_1,\dots,u_n$ تولد V_2

البرهان :

(1) لكل $x\in V_1$ ، توجد مقادير سلمية $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in K$ بحيث $x=\lambda_1 v_1+\dots+\lambda_n v_n$. لنفرض ان الأشعة $u_1,\dots,u_n$ مستقلة خطياً . ليكن $x\in Ker f$ فأن $f(x)=0$ اي ان

$$f(x) = f(\lambda_1 v_1+\dots+\lambda_n v_n) = \lambda_1 u_1+\dots+\lambda_n u_n = 0$$

بما أن $u_1, \dots, u_n$ مستقلة خطياً، فأن $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$

أي أن : $x = 0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_n = 0$ ، ومنه $Ker f = \{0\}$

حسب النظرية $(2.2.2)$ f يكون متباين.

لنفرض ان f متباين ، ولتكن $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ بحيث $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n = 0$

فأن : $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n = f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = 0$

ومنه $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \in Ker f$ ، لكن $Ker f = \{0\}$ ، فأن

$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$ ، بما ان $\{v_1, \dots, v_n\}$ عبارة عن اساس

في الفضاء V_1 ، فأن $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ ، ومنه نستنتج

ان الأشعة $u_1, \dots, u_n$ مستقلة خطياً .

(ج) لنفرض $V_2 = [u_1, \dots, u_n]$ ، فأنه لكل $u \in V_2$ توجد

$\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ بحيث $u = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n$ ، ولكن

$$f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n = u$$

اي ان كل $u \in V_2$ هو صورة لعنصر $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$

من V_1 ، ومنه نستنتج ان f غامر .

ليكن f غامر ، لكل $u \in V_2$ يوجد $v \in V_1$ بحيث $f(v) = u$ ،

فأنه توجد $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ بحيث $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ ، فأن :

$$f(v) = f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n = u$$

اي ان كل شعاع $u \in V_2$ هو مزج خطي للأشعة $u_1, \dots, u_n$ ،

ومنه نستنتج ان $V_2 = [u_1, \dots, u_n]$.

(و . هـ . م)

نستنتج مباشرة من النتيجة السابقة ان :
التطبيق f يكون ايزومورفيزماً $\Leftrightarrow$ صورة اساس في الفضاء V_1 وفق التطبيق الخطي f هو اساس في الفضاء V_2 .

نظرية 3.3.2

كل فضاء شعاعي ببعد منتهي n على الحقل K ، يكون ايزومورفيزمياً مع الفضاء K^n .

البرهان :

ليكن V فضاءً شعاعياً على الحقل K بعده n . ولتكن $\{v_1,\ldots,v_n\}$ اساساً في V . لنأخذ في K^n الاساس النظامي $\{e_1,\ldots,e_n\}$ ، ولنعرف $f: V \to K^n$ كمايلي: $f(v_i)=e_i$ من اجل كل $i=1,\ldots,n$ ، برهننا في النظرية (1.3.2) ان f تطبيق خطي ، وكذلك بما ان $\{e_1,\ldots,e_n\}$ اساس ، فانه حسب النتيجة (2.3.2) f يكون ايزومورفيزماً .
(و . هـ . م .)

نظرية 4.3.2

ليكن V_1 ، V_2 فضاءين شعاعيين على نفس الحقل K ، فان V_1 ، V_2 ايزومورفيزميان $\Leftrightarrow$ إذا كان لهما نفس البعد .

البرهان :

ليكن V_1 ، V_2 ايزومورفيزميان ، أي أن صورة اساس

من V_1 هي اساس في V_2، ومنه عدد أشعة الاساس متساوية فلهما نفس البعد .

ليكن للفضاءين V_1 ، V_2 نفس البعد n ، فأن V_1 يكون ايزومورفيزميا مع K^n، وكذلك V_2 يكون ايزومورفيزميا مع K^n.
بما ان تركيب ايزومورفيزمين هو ايزومورفيزم ، فأن الفضاء V_1 ايزومورفيزمية مع الفضاء V_2 .

(و.هـ.م.)

نظرية 5.3.2

ليكن V_1 ، V_2 فضاءين شعاعيين لبعدين منتهيين على نفس الحقل K ، وليكن $f : V_1 \to V_2$ تطبيقا خطيا عندئذ

$$\dim V_1 = \dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Im} f)$$

البرهان :

اذا كانت $\operatorname{Ker} f = \{0_{V_1}\}$ عندئذ f يكون متباينا، $\dim(\operatorname{Ker} f) = 0$
والتطبيق f من V_1 على $\operatorname{Im} f$ يكون تقابلا ، فأن :

$$\dim V_1 = \dim(\operatorname{Im} f)$$

اي ان :

$$\dim V_1 = \dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Im} f)$$

اذا كانت $\operatorname{Ker} f \neq \{0_{V_1}\}$ ، نفرض ان $\{v_1, \dots, v_n\}$ هي أساس في $\operatorname{Ker} f$ ، $\{u_1, \dots, u_m\}$ اساسا في $\operatorname{Im} f$ ، كما نفرض ان $v_{n+1}, \dots, v_{n+m}$ هي اشعة من V_1، بحيث $f(v_{n+i}) =$ [illegible] لكل $i = 1, \dots, m$. نبرهن ان $\{$ [illegible] $v_n, v_{n+1}, \dots, v_{n+m}\}$ هي اساس في V_1. لتكن $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots, \lambda_{n+m} \in K$ ، ، [illegible]
$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n + \dots + \lambda_{n+m} v_{n+m} = 0_{V_1}$ فأن :

$f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n + \dots + \lambda_{n+m} v_{n+m}) = f(0_{v_1}) = 0_{v_2}$

لكن $\{v_1, \dots, v_n\}$ هو اساس في $Ker f$ فأن :

$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \in Ker f$

إذن $f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = 0_{v_2}$ ، وكذلك فأن $f(v_{n+i}) = u_i$

لكل $i = 1, \dots, m$ ، اي ان $\lambda_{n+1} u_1 + \dots + \lambda_{n+m} u_m = 0_{v_2}$

لكن الاشعة $u_1, \dots, u_m$ مستقلة خطياً فأن $\lambda_{n+1} = \dots = \lambda_{n+m} = 0$.

أي أن من فرضينا ان $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n + \dots + \lambda_{n+m} v_{n+m} = 0_{v_1}$

نستنتج ان $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n + 0.v_{n+1} + \dots + 0.v_{n+m} = 0_{v_1}$. اي ان

$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0_{v_1}$. لكن $\{v_1, \dots, v_n\}$ هو أساس

في $Ker f$ ، فأن $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ ، ومنه نستنتج ان الاشعة

v_{n+m} ، ... ، v_{n+1} ، v_n ، ... ، v_1 مستقلة خطياً .

لكل $v \in V_1$ فأن $f(v) \in Im f$ ، بما ان $\{u_1, \dots, u_m\}$ أساس

لـ $Im f$ ، فأنه توجد $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in K$ ، بحيث $f(v) = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_m u_m$.

بما ان f خطي فأن :

$f[v - (\alpha_1 v_{n+1} + \dots + \alpha_m v_{n+m})] = f(v) - f(\alpha_1 v_{n+1} + \dots + \alpha_m v_{n+m}) =$

$= f(v) - (\alpha_1 f(v_{n+1}) + \dots + \alpha_m f(v_{n+m})) = 0_{v_2}$

فأن :
$v - (\alpha_1 v_{n+1} + \dots + \alpha_m v_{n+m}) \in Ker f$

لنفرض
$v - (\alpha_1 v_{n+1} + \dots + \alpha_m v_{n+m}) = u \in Ker f$

بما ان $\{v_1, \dots, v_n\}$ عبارة عن اساس في $Ker f$ ، فأنه توجد

$\beta_1, \dots, \beta_n \in K$ بحيث $u = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n$.

اي ان :
$v - (\alpha_1 v_{n+1} + \dots + \alpha_m v_{n+m}) = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_m$

فأن :
$\beta_1 v_1 + \dots + \beta_m v_m + \alpha_1 v_{n+1} + \dots + \alpha_m v_{n+m} = v$

نستنتج أن الاشعة $v_1, \dots, v_n, v_{n+1}, \dots, v_{n+m}$ تولد الفضاء V_1 . اي ان $\{v_1, \dots, v_n, v_{n+1}, \dots, v_{n+m}\}$ هي اساس في الفضاء الشعاعي V_1 ، ومنه نستنتج ان $\dim V_1 = n+m$ ، بما ان $\dim \operatorname{Ker} f = n$ ، $\dim \operatorname{Im} f = m$ فأن :

$$\dim V_1 = \dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Im} f)$$

(و.هـ.م.)

6.3.2 تعريف

ليكن V_1 ، V_2 فضاءين شعاعيين على نفس الحقل K ، $f: V_1 \to V_2$ تطبيقاً خطياً ، نسمي بعد $Im(f)$ رتبة التطبيق الخطي f ، ونرمز لها بالرمز $rank(f)$. ونسمي بعد $Ker f$ صفرية f ، ونرمز لها بالرمز $nul(f)$.

7.3.2 نظرية

ليكن V_1 ، V_2 فضاءين شعاعيين ببعدين منتهين n على نفس الحقل K ، وليكن $f: V_1 \to V_2$ تطبيقاً خطياً فأن الشروط التالية متكافئة :

(1) f ايزومورفيزم

(2) f غامر

(3) f متباين

(4) يوجد تطبيق خطي $g: V_2 \to V_1$ بحيث $f \circ g = Id_{V_2}$

(5) يوجد تطبيق خطي $g: V_2 \to V_1$ بحيث $g \circ f = Id_{V_1}$

البرهان :

$(1) \longrightarrow (5)$

بما ان f ايزومورفيزم فانه حسب النظرية (3.2.2)

f^{-1} ايزومورفيزم ، ليكن $g = f^{-1}$ بذلك فان :

$g \circ f = f^{-1} \circ f = Id_{V_1}$

$(5) \longrightarrow (3)$

ليكن $g \circ f = Id_{V_1}$ ، لكل $a \in Ker f$ ، فان $f(a) = 0_{V_2}$ ،

لكن $a \in V_1$ فان :

$$a = Id_{V_1}(a) = (g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(0_{V_2}) = 0_{V_1}$$

اي ان $Ker f = \{0_{V_1}\}$ ، ومنه نستنتج f متباين .

$(3) \longrightarrow (1)$

بما أن f تطبيق خطي متباين فان $Ker f = \{0_{V_1}\}$ ، فان

$\dim(Ker f) = 0$ من هنا نستنتج :

$$\dim(Im f) = \dim(Im f) + 0 = \dim(f(V_1)) + \dim(Ker f)$$
$$= \dim V_1$$

فمنه نستنتج ان $\dim(Im f) = \dim V_1 = \dim V_2$ ، اي ان f

غامر . بذلك فان f ايزومورفيزم .

$(1) \longrightarrow (4)$

بما ان f ايزومورفيزم فانه حسب (3.2.2) ، f^{-1} ايزومورفيزم

ليكن $g = f^{-1}$ فان : $f \circ g = f \circ f^{-1} = Id_{V_2}$

$(2) \leftarrow (4)$

ليكن $f \circ g = Id_{V_2}$ ولكل $a \in V_2$ فأن :

$$a = Id_{V_2}(a) = (f \circ g)(a) = f(g(a))$$

بما ان $g(a) \in V_1$ ، فأن كل $a \in V_2$ هو صورة لعنصر $g(a)$ من V_1 ، بذلك f يكون غامر .

$(1) \leftarrow (2)$

بما ان f غامر والفضاءان نفس البعد n ، فأن :

$$\dim V_1 = \dim V_2 = \dim(Im f) = \dim(Im f) + 0$$

لكن $\dim V_1 = \dim(Im f) + \dim(Ker f)$

فأن $\dim(Ker f) = 0$ ، اي ان : $Ker f = \{0\}$ ، ومنه f ايزومورفيزم .

(و . هـ . م .)

4.2 فضاء حاصل القسمة

1.4.2 تعريف

ليكن V فضاءً شعاعياً على الحقل K، وليكن V_1 فضاءً شعاعياً جزئياً من الفضاء V. نعرف في الفضاء V العلاقة R كمايلي:

$$\forall v_1, v_2 \in V \quad , \quad v_1 R v_2 \Leftrightarrow v_1 - v_2 \in V_1$$

نلاحظ انه لكل $v \in V$، بما ان $v - v = 0 \in V_1$ فأن vRv. ولكل $v_1, v_2 \in V$، إذا كانت $v_1 R v_2$ فأن $v_1 - v_2 \in V$ ومن هنا $v_2 - v_1 \in V_1$، اي ان $v_2 R v_1$. ولكل $v_1, v_2, v_3 \in V$ إذا كانت $v_1 R v_2$ و $v_2 R v_3$ فأن $v_1 - v_2 \in V_1$ و $v_2 - v_3 \in V_1$، فأن $v_1 - v_3 \in V_1$ ومنه $v_1 R v_3$. نستنتج مما سبق ان R هي علاقة تكافؤ على الفضاء V.

لكل $v \in V$ إذا رمزنا لصف v بالرمز $\bar{v}$ فأن:

$$\bar{v} = \{ u \in V \; ; \; vRu \}$$

لكل $u, v \in V$ إذا كان $\bar{u} \cap \bar{v} \neq \emptyset$ فأنه يوجد $x \in V$ بحيث $x \in \bar{u} \cap \bar{v}$ فأن $x \in \bar{u}$ و $x \in \bar{v}$، ومنه xRu و xRv، بما ان R علاقة تكافؤ فأن xRu و vRx ومنه نستنتج vRu. لكل $y \in \bar{u}$ فأنه uRy، لدينا سابقاً vRu، ومنه نستنتج vRy، اي ان $y \in \bar{v}$، ومنه $\bar{u} \subseteq \bar{v}$. بنفس الطريقة نبرهن ان $\bar{v} \subseteq \bar{u}$، وبذلك نستنتج ان $\bar{v} = \bar{u}$. إذن علاقة التكافؤ هذه تقسم V الى صفوف تكافؤ منفصلة.

ونلاحظ ان : $\bar{v}=\{u\in V \;;\; uRv\}=\{u\in V \;;\; u-v\in V_1\}$

$=\{u\in V \;;\; \exists\, h\in V_1 \;,\; u-v=h\}$

$=\{u\in V \;;\; u=v+h\} \;=\; v+V_1$

نرمز لمجموعة صفوف التكافؤ بالرمز $H=\{\bar{v}_1,\bar{v}_2,\dots \;;\; v_1,v_2,\dots\in V\}$

نبرهن ان عملية الجمع في الفضاء الشعاعي V منسجمة مع علاقة التكافؤ R المعرفة اعلاه ، اي اننا نبرهن :

لكل $v_1,v_2,u_1,u_2\in V$ اذا كان v_1Rv_2 و u_1Ru_2 ، فأن $v_1+u_1\,R\,v_2+u_2$.

اذا كان v_1Rv_2 فأن $v_1-v_2\in V_1$.

واذا كان u_1Ru_2 فأن $u_1-u_2\in V_1$ ، لكن V_1 فضاء شعاعي جزئي فأن : $v_1-v_2+u_1-u_2\in V_1$

اي ان $(v_1+u_1)-(v_2+u_2)\in V_1$ فأن $v_1+u_1\,R\,v_2+u_2$.

ونبرهن ان عملية الضرب بمقدار سلمي منسجمة مع علاقة التكافؤ R . اي اننا نبرهن لكل $\lambda\in K$ ولكل $v_1,v_2\in V$

اذا كان v_1Rv_2 فأن $\lambda v_1 R \lambda v_2$.

اذا كان v_1Rv_2 فأن $v_1-v_2\in V_1$ ، بما ان V_1 فضاء شعاعي جزئي من V ، فأنه لكل $\lambda\in K$ ، $\lambda(v_1-v_2)\in V_1$

اي ان $\lambda v_1-\lambda v_2\in V_1$ ومنه $\lambda v_1 R \lambda v_2$.

نعرف عملية الجمع في H كما يلي $\forall \bar{v}_1,\bar{v}_2\in H \,,\, \bar{v}_1+\bar{v}_2=\overline{v_1+v_2}$

وعملية الضرب بمقدار سلمي λ كما يلي $\forall \bar{v}_1\in H \,,\, \lambda\bar{v}_1=\overline{\lambda v_1}$

بذلك عرفنا في H عملية داخلية هو الجمع ، وعملية خارجية هو الضرب بمقدار سلمي ، $\bar{0}$ هو العنصر الحيادي في H ونظير

$\bar{v}$ في H هو $\bar{v}$ - اي ان H هي زمرة تبديلية بالنسبة لعملية الجمع المعرفة اعلاه . وكذلك نلاحظ انه لكل $\bar{v}_1, \bar{v}_2 \in H$ ولكل $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ تتحقق الشروط :

(a) $(\lambda_1+\lambda_2).\bar{v}_1 = \lambda_1.\bar{v}_1 + \lambda_2.\bar{v}_1$

(b) $\lambda_1(\bar{v}_1+\bar{v}_2) = \lambda_1.\bar{v}_1 + \lambda_1.\bar{v}_2$

(c) $\lambda_1(\lambda_2\bar{v}_1) = (\lambda_1\lambda_2)\bar{v}_1$

(d) $1.\bar{v}_1 = \overline{1.v_1} = \bar{v}_1$

فأن H عبارة عن فضاء شعاعي على الحقل K، نسميه فضاء حاصل قسمة الفضاء V على الفضاء الشعاعي الجزئي V_1 ، ونرمز له بالرمز V/V_1 .

2.4.2 نظرية

ليكن V فضاءاً شعاعياً على الحقل K ، V_1 فضاءاً شعاعياً جزئياً من V . وليكن $\chi: V \to V/V_1$ تطبيقاً معرفاً كمايلي : $\forall v \in V \; , \; \chi(v) = \bar{v} = v + V_1$

فأن χ هو تطبيق خطي من V على V/V_1 ، $\operatorname{Ker}\chi = V_1$.

نسمي هذا التطبيق ، بالتطبيق الخطي القانوني (الطبيعي) من الفضاء V على فضاء حاصل القسمة V/V_1 .

البرهان :

نبرهن χ تطبيق خطي .

$$\forall v_1, v_2 \in V \; ; \; \chi(v_1+v_2) = \overline{v_1+v_2} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 = \chi(v_1) + \chi(v_2)$$

و $\forall \lambda \in K , \forall v \in V , \quad \chi(\lambda v) = \overline{\lambda v} = \lambda \bar{v} = \lambda \chi(v)$

ومنه نستنتج χ تطبيق خطي .

نعلم ان العنصر الحيادي في V/V_1 هو $\bar{0}$ اي ان $\bar{0} = 0 + V_1 = V_1$

لكل $v \in Ker \chi$ فان : $\chi(v) = \bar{0} = 0 + V_1 = V_1$

لكن حسب تعريف χ ، $\chi(v) = v + V_1$ اي ان :

$v + V_1 = 0 + V_1$ ومنه $v - 0 = v \in V_1$ فان $Ker \chi \subset V_1 \quad \ldots\ldots (1)$

ولكل $v \in V_1$ ، $\chi(v) = v + V_1 = V_1$ اي ان :

$\chi(v) = 0 + V_1 = V_1$

ومنه $\chi(v) = 0 + V_1 = \bar{0}$ فان $v \in Ker \chi$.

اذن $V_1 \subset Ker \chi \quad \ldots\ldots (2)$. من (1) و (2) نستنتج

$V_1 = Ker \chi$.

(و.هـ.م.)

3.4.2 نظرية (حول الهومومورفيزم) .

ليكن V_1 ، V_2 فضاءين شعاعيين على نفس الحقل K ، وليكن $f : V_1 \to V_2$ تطبيقاً خطياً . فانه يوجد تطبيق خطي وحيد $g : V_1/Kerf \to V_2$ ، بحيث $g \circ \chi = f$ حيث χ هو التطبيق الخطي الطبيعي من الفضاء V_1 على فضاء حاصل القسمة $V_1/Kerf$.

البرهان :

برهنا سابقاً ان $Kerf$ هو فضاء شعاعي جزئي من الفضاء V_1 ، بذلك فان عناصر فضاء حاصل القسمة

$V_1/\ker f$ يكون بالشكل $v+\ker f$ حيث $v\in V_1$.

وكذلك عندنا $\chi : V_1 \to V_1/\ker f$ هومومورفيزم غامر، اي انه لكل $\bar{v} = v + \ker f \in V_1/\ker f$ يوجد $v \in V_1$ بحيث $\chi(v) = \bar{v}$

نعرف الآن $g : V_1/\ker f \to V_2$ كما يلي :

$$\forall \bar{v} \in V_1/\ker f \quad ; \quad g(\bar{v}) = f(v)$$

نلاحظ ان g يعرف تطبيقا لأن :

(1) لكل $\bar{v} \in V_1/\ker f$ ، $v \in V_1$. وبان f تطبيق فأنه يوجد عنصر وحيد $u \in V_2$ ، بحيث $f(v) = u$ ، اي أن لكل عنصر $\bar{v}$ من $V_1/\ker f$ يوجد $f(v) = u$ من V_2 بحيث $g(\bar{v}) = f(v)$.

(2) لكل $\bar{v}_1 , \bar{v}_2 \in V_1/\ker f$ اذا كان $\bar{v}_1 = \bar{v}_2$ فأن $\chi(v_1) = \chi(v_2)$ اي ان $\chi(v_1) - \chi(v_2) = \bar{0}$ ، فأن $\chi(v_1 - v_2) = \bar{0}$ ومنه $v_1 - v_2 \in \ker \chi$ لكن حسب $(2.4.2)$ لدينا $\ker \chi = \ker f$. فأن $v_1 - v_2 \in \ker f$ اي ان $f(v_1 - v_2) = 0$ ، ومنه $f(v_1) - f(v_2) = 0$ ، فأن $f(v_1) = f(v_2)$ ومنه نستنج : $g(\bar{v}_1) = g(\bar{v}_2)$ ، فأن g تطبيق .

وكذلك لكل $\bar{v}_1 ، \bar{v}_2 \in V_1/\ker f$ فأن :

$$g(\bar{v}_1 + \bar{v}_2) = g(\overline{v_1 + v_2}) = f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$$
$$= g(\bar{v}_1) + g(\bar{v}_2)$$

و $\forall \lambda \in K , \forall \bar{v} \in V_1/\ker f , \ g(\lambda \bar{v}) = g(\overline{\lambda v}) = f(\lambda v)$
$$= \lambda f(v) = \lambda g(\bar{v})$$

ومنه نستنج g خطي .

$$\forall v \in V_1 , (g \circ \chi)(v) = g(\chi(v)) = g(\bar{v}) = f(v)$$

ومنه $g \circ \chi = f$

ليكن $g_1 : V_1/\ker f \to V_2$ اي تطبيق خطي اخر بحيث $g_1 \circ \chi = f$ فانه لكل $\bar{v} \in V_1/\ker f$

$$g_1(\bar{v}) = g_1(\chi(v)) = (g_1 \circ \chi)(v) = f(v) = (g \circ \chi)(v) = g(\chi(v))$$
$$= g(\bar{v})$$

ومنه نستنتج $g = g_1$ ، اي ان g وحيد .

(و . هـ . م .)

4 . 4 . 2 نظرية (حول الأيزومورفيزم)

ليكن V_1 ، V_2 فضاءين شعاعيين على نفس الحقل K ، وليكن $f : V_1 \to V_2$ تطبيقاً خطياً فان :

(1) يوجد ايزومورفيزم بين $V_1/\ker f$ و $\operatorname{Im} f$.

(2) اذا كان f تطبيقاً خطياً غامراً فان g يكون ايزومورفيزماً بين $V_1/\ker f$ و V_2 .

البرهان :

(1) لنعرف التطبيق g كما في النظرية (3.4.2) فان :

$$g(V_1/\ker f) = g(\chi(V_1)) = (g \circ \chi)(V_1) = f(V_1) = \operatorname{Im} f$$

اي ان $g : V_1/\ker f \to \operatorname{Im} f$ غامر

لكل $\bar{v}_1, \bar{v}_2 \in V_1/\ker f$ اذا كان $g(\bar{v}_1) = g(\bar{v}_2)$ فان $f(v_1) = f(v_2)$

اي ان $f(v_1) - f(v_2) = 0$ ومنه $f(v_1 - v_2) = 0$ فان $v_1 - v_2 \in \ker f$

لكن $\ker f = \ker \chi$ ، فان $v_1 - v_2 \in \ker \chi$ فان $\chi(v_1 - v_2) = 0$

اي ان $\chi(v_1) - \chi(v_2) = 0_{V_1/\ker f}$ فان $\chi(v_1) = \chi(v_2)$ ومنه $\bar{v}_1 = \bar{v}_2$ ،

اي ان g متباين .

(2) إذا كان f غامر فأن:

$$g(V_1/\ker f) = g(\chi(V_1)) = (g \circ \chi)(V_1) = f(V_1) = V_2$$

وبرهنا في (1) g متباين ، نستنتج ان g ايزومورفيزم.

(و. هـ. م.)

5.2 فضاء التطبيقات الخطية

ليكن V_1 ، V_2 فضاءين شعاعيين على نفس الحقل K ، ولتكن $L(V_1,V_2)$ مجموعة جميع التطبيقات الخطية من الفضاء V_1 في الفضاء V_2 . المجموعة $L(V_1,V_2) \neq \emptyset$ لأنها تحتوي على الأقل على التطبيق الصفري .

لكل $f_1, f_2 \in L(V_1,V_2)$ نعرف f_1+f_2 كمايلي :

$$\forall v \in V_1 \ , \ (f_1+f_2)(v) = f_1(v) + f_2(v)$$

لنبرهن ان $L(V_1,V_2)$ مغلقة بالنسبة لهذه العملية ، اي ان جمع تطبيقين خطيين كماهو معرف اعلاه، هو تطبيق خطي .

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in K \ , \forall v_1, v_2 \in V_1 \ , \quad \forall f_1, f_2 \in L(V_1, V_2) \ ;$$

$$(f_1+f_2)(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = f_1(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) + f_2(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) =$$

$$= \lambda_1 f_1(v_1) + \lambda_2 f_1(v_2) + \lambda_1 f_2(v_1) + \lambda_2 f_2(v_2)$$

$$= \lambda_1 (f_1(v_1) + f_2(v_1)) + \lambda_2 (f_1(v_2) + f_2(v_2))$$

$$= \lambda_1 (f_1+f_2)(v_1) + \lambda_2 (f_1+f_2)(v_2)$$

ونعرف ضرب تطبيق خطي $f \in L(V_1, V_2)$ بمقدار سلمي λ كمايلي :

$$\forall \lambda \in K \ , \ \forall v \in V_1 \ , \ \forall f \in L(V_1, V_2) \ , \ (\lambda f)(v) = \lambda f(v)$$

ونلاحظ ان :

$$\forall \lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in K \ , \ \forall v_1, v_2 \in V_1 \ , \ \forall f \in L(V_1, V_2) \ :$$

$$(\lambda f)(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda(f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)) = \lambda(\lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2))$$
$$= \lambda \lambda_1 f(v_1) + \lambda \lambda_2 f(v_2) = \lambda_1((\lambda f)(v_1)) + \lambda_2((\lambda f)(v_2))$$

أي أن الضرب بمقدار سلمي كما هو معرف اعلاه هو تطبيق خطي . نلاحظ ان المجموعة $L(V_1, V_2)$ وعملية جمع التطبيقات زمرة تبديلية لأنه :

(١) لكل $f, g \in L(V_1, V_2)$ ، ولكل $v \in V_1$ ،

$$(f+g)(v) = f(v) + g(v) = g(v) + f(v) = (g+f)(v)$$

فأن $f+g = g+f$ اي ان عملية جمع التطبيقات تبديلية في $L(V_1, V_2)$.

(٢) لكل $f, g, h \in L(V_1, V_2)$ ولكل $v \in V_1$.

$$(f+(g+h))(v) = f(v) + (g+h)(v) = f(v) + (g(v)+h(v))$$
$$= (f(v) + g(v)) + h(v) = (f+g)(v) + h(v) = ((f+g)+h)(v)$$

فأن $f + (g+h) = (f+g) + h$ اي ان عملية جمع التطبيقات تجميعية في $L(V_1, V_2)$.

(٣) حسب (2.1.2) يوجد التطبيق الصفري $f_0 \in L(V_1, V_2)$ بحيث لكل $v \in V_1$ ،

$$(f+f_0)(v) = f(v) + f_0(v) = f(v) + 0 = f(v)$$

فأن $f+f_0=f$ ، ومنه f_0 هو العنصر الحيادي بالنسبة لعملية جمع التطبيقات في $L(V_1,V_2)$.

(4) لكل $f\in L(V_1,V_2)$ ولكل $v\in V_1$ ، $f(v)\in V_2$

فأن $-f(v)\in V_2$ وان : $f(v)+(-f(v))=0=f_0(v)$

اي ان $(f+(-f))(v)=f_0(v)$ ومنه $f+(-f)=f_0$

اي ان $-f$ هو العنصر النظير بالنسبة لعملية جمع التطبيقات في $L(V_1,V_2)$.

ونلاحظ كذلك :(1) لكل $f\in L(V_1,V_2)$ ولكل $\lambda_1,\lambda_2\in K$ ولكل $v\in V_1$ ،

$$((\lambda_1+\lambda_2)f)(v)=(\lambda_1+\lambda_2)f(v)=\lambda_1(f(v))+\lambda_2(f(v))$$
$$=(\lambda_1 f)(v)+(\lambda_2 f)(v)=(\lambda_1 f+\lambda_2 f)(v)$$

فأن $(\lambda_1+\lambda_2)f=\lambda_1 f+\lambda_2 f$.

وبنفس الطريقة نبرهن :

(2) لكل $f,g\in L(V_1,V_2)$ و لكل $\lambda_1\in K$ ،

$$\lambda_1(f+g)=\lambda_1 f+\lambda_1 g$$

(3) لكل $f\in L(V_1,V_2)$ ولكل $\lambda_1,\lambda_2\in K$ ،

$$(\lambda_1\lambda_2)(f)=\lambda_1(\lambda_2 f)$$

(4) لكل $f\in L(V_1,V_2)$ ، $1.f=f$.

نستنتج مما سبق ان $L(V_1,V_2)$ وهاتين العمليتين هو فضاء شعاعي على الحقل K ، ويسمى بفضاء التطبيقات الخطية .

6 . 2 الفضاء الثنوي والأساس الثنوي .

1 . 6 . 2 تعريف

ليكن V فضاءً شعاعياً على الحقل K . كل تطبيق خطي $f : V \to K$ يسمى شكلاً خطياً . نرمز لمجموعة جميع الأشكال الخطية من V في K بالرمز $\mathcal{L}(V, K)$.

2 . 6 . 2 مثال

ليكن $\mathbb{R}^n$ فضاءً شعاعياً على الحقل $\mathbb{R}$ ، ولتكن $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ مقادير سلمية و $\{v_1, \dots, v_n\}$ اساساً في الفضاء $\mathbb{R}^n$. فأن التطبيق $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ المعرف بالشكل التالي:

$$\forall v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \in \mathbb{R}^n \ , \ \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} \ ,$$

$$f(v) = f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_n \alpha_n$$

هو شكل خطي من $\mathbb{R}^n$ في $\mathbb{R}$ لأنه :

$$\forall v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \ , \ u = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n \ , \ \lambda_i, \beta_i \in \mathbb{R}$$

فأن

$$f(v+u) = f((\lambda_1+\beta_1) v_1 + \dots + (\lambda_n+\beta_n) v_n) =$$

$$= (\lambda_1+\beta_1)\alpha_1 + \dots + (\lambda_n+\beta_n)\alpha_n = (\lambda_1\alpha_1 + \dots + \lambda_n\alpha_n) + (\beta_1\alpha_1 + \dots + \beta_n\alpha_n)$$

$$= f(v) + f(u)$$

وكذلك

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \ , \ f(\lambda v) = f(\lambda\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda\lambda_n v_n) = (\lambda\lambda_1)\alpha_1 + \dots + (\lambda\lambda_n)\alpha_n$$

$$= \lambda(\lambda_1\alpha_1 + \dots + \lambda_n\alpha_n) = \lambda f(v)$$

3.6.2 تعريف

ليكن V فضاءاً شعاعياً على الحقل K . كما في (5.2) برهنا ان $L(V,K)$ هو فضاء شعاعي على الحقل K . نسمي هذا الفضاء ، بالفضاء الثنوي للفضاء V ونرمز له بالرمز V^* .

4.6.2 نظرية

ليكن V فضاءاً شعاعياً على الحقل K ذي بعد n ، فأن V^* ايزومورفيزمية مع K^n .

البرهان :

لتكن $\{v_1,\dots,v_n\}$ اساساً في الفضاء الشعاعي V ، لكل $f\in L(V,K)$ نعرف $f: V\to K$ كمايلي :

$$\forall v\in V \ , \ \exists \lambda_1,\dots,\lambda_n\in K \ ; \ v=\lambda_1 v_1+\dots+\lambda_n v_n \ ;$$

$$f(v)=f(\lambda_1 v_1+\dots+\lambda_n v_n) = \lambda_1\alpha_1+\dots+\lambda_n\alpha_n \ , \ \alpha_1,\dots,\alpha_n\in K$$

نلاحظ ان f عبارة عن شكل خطي يحقق $f(v_i)=\alpha_i$ لكل i حيث $i=1,\dots,n$. لنرمز للشكل الخطي بالرمز $f_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)}$.

نعرف $g: K^n\to L(V,K)$ كمايلي :

$$\forall (\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in K^n \ , \quad g(\alpha_1,\dots,\alpha_n) = f_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)}$$

لكل $(\alpha_1,\dots,\alpha_n) , (\beta_1,\dots,\beta_n)\in K^n$ واذا كانت :

$(\alpha_1,\dots,\alpha_n) = (\beta_1,\dots,\beta_n)$ فأن $\alpha_i=\beta_i$ لكل $i=1,\dots,n$.

من هنا نأخذ لكل $v=\lambda_1 v_1+\dots+\lambda_n v_n\in V$ فأن :

$$\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_n\alpha_n=\lambda_1\beta_1+\cdots+\lambda_n\beta_n$$

اي أن :

$$f_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)}(\lambda_1 v_1+\cdots+\lambda_n v_n)=f_{(\beta_1,\ldots,\beta_n)}(\lambda_1 v_1+\cdots+\lambda_n v_n)$$

فأن

$$\forall v\in V\ ,\quad f_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)}(v)=f_{(\beta_1,\ldots,\beta_n)}(v)$$

ومنه $g(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=g(\beta_1,\ldots,\beta_n)$ اي ان g تطبيق .

$$\forall\ (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\ ,(\beta_1,\ldots,\beta_n)\in K^n\ ;\ g(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=f_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)}$$

$$g(\beta_1,\ldots,\beta_n)=f_{(\beta_1,\ldots,\beta_n)}\quad \text{و}$$

$$\forall v=\lambda_1 v_1+\cdots+\lambda_n v_n\in V,\quad \lambda_i\in K\ ,\ f_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)}(v)+f_{(\beta_1,\ldots,\beta_n)}(v)=$$
$$=\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_n\alpha_n+\lambda_1\beta_1+\cdots+\lambda_n\beta_n=\lambda_1(\alpha_1+\beta_1)+\cdots+\lambda_n(\alpha_n+\beta_n)$$
$$=f_{(\alpha_1+\beta_1,\ldots,\alpha_n+\beta_n)}(v)$$

فأن

$$f_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)}+f_{(\beta_1,\ldots,\beta_n)}=f_{(\alpha_1+\beta_1,\ldots\alpha_n+\beta_n)}$$

من هنا فأن :

$$g((\alpha_1,\ldots,\alpha_n)+(\beta_1,\ldots,\beta_n))=g(\alpha_1+\beta_1,\ldots,\alpha_n+\beta_n)=$$
$$=f_{(\alpha_1+\beta_1,\ldots,\alpha_n+\beta_n)}=f_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)}+f_{(\beta_1,\ldots,\beta_n)}=g(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)+g(\beta_1,\ldots,\beta_n)$$

وكذلك لكل $\lambda\in K$ فأن :

$$f_{(\lambda\alpha_1,\ldots,\lambda\alpha_n)}(v)=\lambda_1(\lambda\alpha_1)+\cdots+\lambda_n(\lambda\alpha_n)=\lambda(\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_n\alpha_n)$$
$$=\lambda f_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)}(v)$$

فأنه

$$g(\lambda(\alpha_1,\ldots,\alpha_n))=g(\lambda\alpha_1,\ldots,\lambda\alpha_n)=f_{(\lambda\alpha_1,\ldots,\lambda\alpha_n)}$$

$= \lambda f_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)} = \lambda g(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$

فأن g هو تطبيق خطي .

لكل $f \in V^*$ ولكل $i = 1,\dots,n$ فأن :

$$f_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)}(v_i) = f_{(\alpha_1,\dots,\alpha_i,\dots,\alpha_n)}(0.v_1 + \dots + 1.v_i + \dots + 0.v_n)$$
$$= 1.\ \alpha_i = \alpha_i$$

اي ان : $f_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)}(v_i) = \alpha_i$ ، حيث $(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in K^n$

اي انه لكل $f \in V^*$ توجد مقادير سلمية $(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in K^n$ بحيث $f_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)}(v_i) = \alpha_i$ ، اي انه لكل $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \in V$ فأن :

$$f_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)}(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_n \alpha_n$$

اي انه لكل $f \in V^*$ توجد $(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in K^n$ بحيث :

$g(\alpha_1,\dots,\alpha_n) = f_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)}$ فأن g غامر .

وأخيراً لكل $(\alpha_1,\dots,\alpha_n), (\beta_1,\dots,\beta_n) \in K^n$ اذا كان

$g(\alpha_1,\dots,\alpha_n) = g(\beta_1,\dots,\beta_n)$ فأن $f_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)} = f_{(\beta_1,\dots,\beta_n)}$

فأنه لكل $i = 1,\dots,n$ ، $f_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)}(v_i) = f_{(\beta_1,\dots,\beta_n)}(v_i)$

اي ان $\alpha_i = \beta_i$ لكل $i = 1,\dots,n$.

فأن $(\alpha_1,\dots,\alpha_n) = (\beta_1,\dots,\beta_n)$ ومنه g متباين .

بذلك نستنتج V^* ، K^n ايزومورفيزميان .

(و . هـ . م)

5.6.2 نتيجة

ليكن V فضاءً شعاعياً على الحقل K ، فأن V ، V^* لهما نفس البعد ، وصورة اساس في V هي أساس في V^* ، لأنه اذا كان $\dim V = n$ فأن $K^n \simeq V$ ، $K^n \simeq V^*$ فأن $V \simeq V^*$. اي ان V ، V^* لهما نفس البعد وصورة اساس في V هي اساس في V^* .

6.6.2 نظرية

ليكن V فضاءً شعاعياً على الحقل K ، ولتكن $\{v_1, \dots, v_n\}$ اساساً في V ، وليكن $f_1, \dots, f_n \in V^*$ بحيث أن:

$$f_i(v_j) = \begin{cases} 1 & \text{عندما } i = j \\ 0 & \text{عندما } i \neq j \end{cases} \quad \text{لكل } i, j = 1, \dots, n$$

فأن $\{f_1, \dots, f_n\}$ اساس للفضاء V^*

البرهان :

لكل $f \in V^*$ فأنه لـ $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ ولكل $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$

فأن : $f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_n \alpha_n$

و $f(v_i) = \alpha_i$ لكل $i = 1, \dots, n$.

فأنه لكل $i = 1, \dots, n$:

$$(\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n)(v_i) = \alpha_1 f_1(v_i) + \dots + \alpha_n f_n(v_i) = \alpha_i \cdot 1 = \alpha_i = f(v_i)$$

ومنه فأن $f = \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n$ اي ان : $V^* = [f_1, \dots, f_n]$.

لكل $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ اذا كان $\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n = f_0 = 0_{V^*}$

فأنه لكل $i=1,\dots,n$ ، $(\alpha_1 f_1+\cdots+\alpha_n f_n)(v_i) = f_0(v_i) = 0$

لكن $f_j(v_i)=0$ عندما $i\neq j$ و $f_j(v_i)=1$ عندما $i=j$

فأن $\alpha_i f_i(v_i) = \alpha_i \cdot 1 = \alpha_i = 0$ لكل $i=1,\dots,n$ ، اي ان

$f_1,\dots,f_n$ مستقلة خطياً ، وبذلك فأن المجموعة $\{f_1,\dots,f_n\}$

هي اساس للفضاء V^* .

(و . هـ . م .)

2 . 6 . 7 تعريف

الاساس $\{f_1,\dots,f_n\}$ للفضاء الثنوي V^* في النظرية

(2 . 6 . 6) نسميه الاساس الثنوي للأساس $\{v_1,\dots,v_n\}$.

2 . 6 . 8 مثال

لنأخذ الفضاء الشعاعي IR^2 على الحقل IR ، والمجموعة

$\{v_1=(2,1), v_2=(0,3)\}$ اساساً للفضاء الشعاعي IR^2 .

نبحث عن شكلين خطيين f_1 ، f_2 على IR^2 بحيث $f_1(v_1)=1$

، $f_1(v_2)=0$ ، $f_2(v_1)=0$ ، $f_2(v_2)=1$. نعرف f_1 ، f_2 كمايلي :

$f_2(x_1,x_2)=cx_1+dx_2$, $f_1(x_1,x_2)=ax_1+bx_2$; $\forall (x_1,x_2)\in IR^2$

من هنا فأن : $f_1(v_1)=f_1(2,1)=2a+b=1$ ، $f_1(v_2)=f_1(0,3)=0+3b=0$

ومنه نستنتج أن $a=1/2$ ، $b=0$.

ومن $f_2(v_1)=f_2(2,1)=2c+d=0$ ، $f_2(v_2)=f_2(0,3)=0+3d=1$

نستنتج أنه $c=-1/6$ ، $d=1/3$. فأن الاساس الثنوي هو

$\{f_1,f_2\}$ حيث f_1 ، f_2 هما شكلان خطيان معرفان من IR^2 في IR

كمايلي: $f_2(x,y)=cx+dy=-1/6x+1/3y$, $f_1(x,y)=ax+by=1/2x$, $\forall(x,y)\in IR^2$

2 . 7 الأشكال متعددة الخطية

2 . 7 . 1 تعريف

ليكن V ، $V_1,\dots,V_n$ فضاءات شعاعية على نفس الحقل K ، وليكن $f: V_1\times\dots\times V_n \to V$ تطبيقاً يحقق مايلي:

$\forall (v_1,\dots,v_n),\ (v'_1,\dots,v'_n) \in V_1\times\dots\times V_n,\ \forall \lambda\in K;\ \forall i=1,\dots,n$

(1) $f(v_1,\dots,v_i+v'_i,\dots\dots,v_n) = f(v_1,\dots,v_i,\dots,v_n) + f(v_1,\dots,v'_i,\dots,v_n)$

(2) $f(v_1,\dots,\lambda v_i,\dots,v_n) = \lambda f(v_1,\dots,v_i,\dots,v_n)$

نقول عندئذ ان f عبارة عن تطبيق متعدد الخطية من الدرجة n .

وإذا كان $V_1=\dots=V_n=V$ نسمي f عندئذ، تطبيق متعدد الخطية من الدرجة n على الفضاء V .

2 . 7 . 2 تعريف

ليكن $V_1,\dots,V_n$ فضاءات شعاعية على الحقل K.

التطبيق $f: V_1\times\dots\times V_n \to K$ الذي يحقق الشرطين (1)، (2) من (2 . 7 . 1) يسمى بشكل متعدد الخطية من الدرجة n .

ملاحظة

إذا كان $n=2$ في (2 . 7 . 1) ، (2 . 7 . 2) عندئذ نسمي $f: V_1\times V_2 \to V$ بتطبيق مزدوج الخطية ، $f: V_1\times V_2\to K$ بشكل ثنائي الخطية ، وإذا كان $n=3$ عندئذ نسمي $f: V_1\times V_2\times V_3 \to V$ بتطبيق ثلاثي الخطية و $f: V_1\times V_2\times V_3\to K$ بشكل ثلاثي الخطية .

3.7.2 تعريف

ليكن f شكلاً متعدد الخطية من الدرجة n ، نقول أن f متناوب إذا كان $f(v_1, \ldots, v_n) = 0$ كلما تساوى اثنان من الأشعة $v_1, \ldots, v_n$.

4.7.2 نظرية

ليكن f شكلاً متعدد الخطية، ومتناوباً، من الدرجة n على الفضاء الشعاعي V على الحقل K ، فأن قيمة $f(v_1, \ldots, v_n)$ تضرب بالعدد $1-$ كلما يجري تبديل بين اثنين من الأشعة $v_1, \ldots, v_n$.

البرهان :

بما أن f متناوب فأنه لكل v_i ، v_j ، $i \neq j$

$$f(v_1, \ldots, v_i + v_j, \ldots, v_j + v_i, \ldots, v_n) = 0$$

لكن f متعدد الخطية من الدرجة n فأن :

$$f(v_1, \ldots, v_i + v_j, \ldots, v_j + v_i, \ldots, v_n) = f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n) + f(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_n) + f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_i, \ldots, v_n) + f(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_j, \ldots, v_n) = 0$$

بما أن f متناوب فأن :

$$f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_i, \ldots, v_n) = 0 \quad , \quad f(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_j, \ldots, v_n) = 0$$

فأن :

$$f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n) + f(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_n) = 0$$

ومنه نستنتج

$$f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n) = -f(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_n)$$

(م. هـ. و)

5.7.2 نظريـة

ليكن f شكلاً متعدد الخطية من الدرجة n ومتناوباً على الفضاء V . إذا كانت الاشعة $v_1,\dots,v_n \in V$ مرتبطة خطياً فأن $f(v_1,\dots,v_n)=0$

البرهان :

بما ان $v_1,\dots,v_n$ مرتبطة خطياً ، فأنه حسب النظرية (6.4.1) يمكن كتابة احد الاشعة بشكل مزج خطي للبقية.
لنفرض ان v_1 هو مزج خطي لبقية الاشعة ، فأنه توجد مقادير سلمية $\lambda_2,\dots,\lambda_n \in K$ بحيث : $v_1=\lambda_2 v_2+\dots+\lambda_n v_n$
فأن :

$$f(v_1,\dots,v_n)=f(\lambda_2 v_2+\dots+\lambda_n v_n\,,\,v_2,\dots,v_n)$$

بما ان f شكل متعدد الخطية فأن :

$$f(\lambda_2 v_2,\dots,\lambda_n v_n\,,\,v_2,\dots,v_n)=\lambda_2 f(v_2\,,v_2,\dots,v_n)+\lambda_3 f(v_3,v_2,v_3,\dots,v_n)$$
$$+\dots+\lambda_n f(v_n,v_2,v_3,\dots,v_n)$$

بما ان f متناوب فأن :

$$f(v_2,v_2,\dots,v_n)=f(v_3,v_2,v_3,\dots,v_n)=\dots=f(v_n,v_2,\dots,v_n)=0$$

اي ان :

$$f(v_1,\dots,v_n)=\lambda_2\cdot 0+\lambda_3\cdot 0+\dots+\lambda_n\cdot 0=0$$

ومنه نستنتج ان $f(v_1,\dots,v_n)=0$

(و.هـ.م.)

نظرية 6.7.2

ليكن f شكلاً متعدد الخطية من الدرجة n ومتناوباً على الفضاء V ، ولتكن $v_1, \dots, v_n$ اشعة من V. فان قيمة $f(v_1, \dots, v_n)$ لا تتغير عندما نضيف الى اي شعاع v_i مزجاً خطياً للأشعة الباقية v_j حيث $j \neq i$.

البرهان :

ليكن y مزجاً خطياً للأشعة v_j حيث $j \neq i$. فأنه توجد مقادير سلمية $\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_n$ ، بحيث :

$$y = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \cdots + \lambda_n v_n$$

و $f(v_1, \dots, v_i + y, \dots, v_n) = f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n) + f(v_1, \dots, y, \dots, v_n)$

بما ان f متناوب فأن : $f(v_1, \dots, y, \dots, v_n) = 0$

اي ان : $f(v_1, \dots, v_i + y, \dots, v_n) = f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n)$

(و.هـ.م.)

- تمــــارين -

(1) بين أياً من التطبيقات التاليــة عبارة عن تطبيق خطي :-

(a) $f: V \to V$ معرفاً كالآتي ، $\forall v \in V \ , \ f(v) = -v$

(b) $f: IR^4 \to IR^2$ معرفاً كالآتي ، $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2)$

(c) $f: IR \to IR$ معرفاً كالآتي ، $f(x) = x^3$

(d) $f: IR \to IR$ معرفاً كالآتي ، $f(x) = 2x+3$

(2) ليكن $f: C \to C$ تطبيقاً معرفاً كالآتي : $f(z) = \bar{z}$.
اثبت ان f عبارة عن تطبيق خطي عندما C يكون فضاءً شعاعياً على الحقل IR ، لكنه لا يكون تطبيقاً خطياً عندما C يكون فضاءً شعاعياً على الحقل C .

(3) اوجد $Ker f$ ، $Im f$ إذا كان :

(a) $f: C^2 \to C^2$ معرفاً كالآتي : $f(z_1, z_2) = (z_1 + z_2 \ , \ 2z_1 + 2z_2)$

(b) $f: IR^2 \to IR$ معرفاً كالآتي : $f(x, y) = x - y$

(4) ليكن $f: IR^2 \to IR^2$ تطبيقاً خطياً معرفاً كالآتي : لكل $(x,y) \in IR^2$ ، $f(x,y) = (x+y \ , \ x-y)$. اثبت ان f ايزومورفيزم.

(5) ليكن V_1 ، V_2 فضاءين شعاعين جزئيين من الفضاء الشعاعي V على الحقل K ، وليكن $V = V_1 \oplus V_2$ ، أثبت

أن $V/V_1 \simeq V_2$.

(6) ليكن V_1 ، V_2 فضاءين شعاعيين جزئيين من الفضاء الشعاعي V على الحقل K. حيث $V = V_1 \oplus V_2$ وليكن التطبيق $f : V_1 \oplus V_2 \longrightarrow V_1$ معرفاً كمايلي :

$$\forall x_1 \in V_1 \ , \ \forall x_2 \in V_2 \ , \quad f(x_1 + x_2) = x_1$$

(a) برهن ان f تطبيق خطي .

(b) اوجد $Ker f$ ، $Im f$.

(7) ليكن $f : IR^3 \rightarrow IR^3$ حيث IR^3 فضاء شعاعي على الحقل IR معرفاً كمايلي :

$$\forall (x,y,z) \in IR^3 \ , \quad f(x,y,z) = (x, 2x+z, y+z)$$

هل ان ؟ $\dim IR^3 = \dim(Ker f) + \dim(Im f)$

برهن جوابك .

(8) ليكن V فضاءاً شعاعياً على الحقل IR وليكن $f : V \rightarrow IR$ ، $g : V \rightarrow IR$ تطبيقين خطيين ، وليكن $h : V \rightarrow IR^2$ تطبيقاً معرفاً كمايلي :

$$\forall v \in V \ , \ h(v) = (f(v), g(v))$$

هل ان h تطبيق خطي ؟ برهن جوابك .

(9) ليكن $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ تطبيقاً خطياً معرفاً كمايلي :

$$\forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \quad , \quad f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 \, , \, x_1 + x_3 \, , \, x_1 - x_3)$$

(a) احسب $f(e_1)$ ، $f(e_2)$ ، $f(e_3)$ حيث $\{e_1, e_2, e_3\}$ عبارة عن الأساس النظامي في الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^3$ على الحقل $\mathbb{R}$.

(b) اثبت ان $f(e_1)$ ، $f(e_2)$ ، $f(e_3)$ اشعة مستقلة خطياً، مستنتجاً ان f تقابلي .

(c) اوجد صورة الشعاع x بواسطة التطبيق $f^2 = f \circ f$.

(10) ليكن $\mathbb{R}^2$ ، $\mathbb{C}$ فضاءين شعاعيين على نفس الحقل $\mathbb{R}$
وليكن $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ تطبيقاً معرفاً كمايلي :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad ; \quad f(x, y) = x + iy$$

(a) برهن ان f تطبيق خطي .

(b) اوجد $\mathrm{Ker} f$ ، $\mathrm{Im} f$ هل ان f ايزومورفيزم ؟ .

(c) اذا كان $\{e_1 = (1,0) \, , \, e_2 = (0,1)\}$ اساساً في $\mathbb{R}^2$ فأوجد اساساً في $\mathbb{C}$.

(d) برهن ان : $\dim \mathbb{R}^2 = \dim(\mathrm{Ker} f) + \dim(\mathrm{Im} f)$

(11) ليكن $\mathbb{R}^3$ فضاءاً شعاعياً على الحقل $\mathbb{R}$.

(a) بين ان الأشعة $x_1 = (1,7,1)$ ، $x_2 = (1,7,4)$ مستقلة خطياً في $\mathbb{R}^3$.

(b) اوجد شعاعاً ثالثاً بحيث يكون $\{x_1, x_2, x_3\}$ اساساً لـ $\mathbb{R}^3$.

(c) نفرض ان $\{b_1 = (1,2,3) \, , \, b_2 = (3,4,6) \, , \, b_3 = (3,1,1)\}$ اساساً في $\mathbb{R}^3$
ونفرض وجود التطبيق الخطي $h: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ الذي من أجله يكون

$h(b_1) = -2$ ، $h(b_2) = 5$ ، $h(b_3) = -3$. اوجد قيمة $h(0,1,2)$.

(12) ليكن $h: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ تطبيقاً خطياً معرفاً كالآتي :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ , \ h(x,y,z) = (0, x+y, x+y+z)$$

(a) اوجد $Ker h$.

(b) هل h متباين ؟ بين لماذا $Ker h$ فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^3$ ؟ .

(c) اوجد $\dim(Ker h)$.

(13) ليكن V_1 ، V_2 فضاءين شعاعيين جزئيين من الفضاء الشعاعي V على الحقل K وذي ابعاد منتهية ، وليكن $f: V_1 \times V_2 \to V$ معرفاً كالآتي :

$$\forall (x_1, x_2) \in V_1 \times V_2 \ , \ f(x_1, x_2) = x_1 + x_2.$$

(a) تحقق من كون f خطي .

(b) احسب $Ker f$ واستنتج ان $Ker f$ ايزومورفية مع $V_1 \cap V_2$.

(c) احسب $Im f$ وبرهن ان :

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$$

(14) ليكن $f: V_1 \to V_2$ تطبيقاً خطياً . واذا كانت الاشعة $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ مستقلة خطياً في V_2 فبرهن ان $v_1, \ldots, v_n$ مستقلة خطياً في V_1 . واذا كانت الاشعة $v_1, \ldots, v_n$ مرتبطة خطياً في V_1 فبرهن ان $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ مرتبطة خطياً في V_2.

(15) ليكن V_n ، ... ، V_2 ، V_1 فضاءات شعاعية جزئية من الفضاء الشعاعي V على الحقل K ، بحيث

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_n$$

برهن ان :

$$\dim V = \dim V_1 + \dim V_2 + \cdots + \dim V_n$$

(16) ليكن V فضاءاً شعاعياً على الحقل K ولنكن $\{a_1, a_2, a_3\}$ اساساً للفضاء V ، وليكن f تطبيقاً خطياً من V من نفسه .

(a) برهن ان f يكون معروف تماماً اذا علمت القيم $f(a_1)$ ، $f(a_2)$ ، $f(a_3)$.

(b) لنفرض ان $f(a_1) = a_2 + a_3$ ، $f(a_2) = a_1 + a_3$ ، $f(a_3) = a_1 + a_2$ اوجد $f(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3)$.

(c) برهن ان f متباين وغامر .

(d) اوجد f^{-1} .

(e) اوجد $\operatorname{Ker} f^{-1}$.

(17) ليكن $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ، $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ تطبيقين خطيين معرفين كالآتي :

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2 , x_1 + x_2) \quad , \quad g(x_1, x_2) = (x_1 - x_2 , 0) ,$$

احسب $2f$ ، $f \circ g + f^3 + 3g$ حيث $f^3 = f \circ f \circ f$. اي من التطبيقين f ، g عبارة عن ايزومورفيزم للفضاء $\mathbb{R}^2$ على $\mathbb{R}^2$ ؟

(18) ليكن $\mathbb{R}^n$ فضاءً شعاعياً على الحقل $\mathbb{R}$ ، وليكن :

$x = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n$ ، $y = b_1 v_1 + b_2 v_2 + \cdots + b_n v_n$

حيث $\{v_1, \ldots, v_n\}$ عبارة عن اساس للفضاء $\mathbb{R}^n$ وليكن $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

تطبيقاً معرفاً كالآتي : $f(x, y) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$

اثبت ان f هو شكل مزدوج الخطية .

(19) ليكن g ، h شكلين خطيين من الفضاء الشعاعي V على الحقل

K ، وليكن $f : V \times V \to K$ معرفاً كالآتي : $f(v_1, v_2) = g(v_1) h(v_2)$

برهن ان f شكل مزدوج الخطية . هل ان f متناوب ؟ .

(20) ليكن $g, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ معرفين كالآتي .

$h(x, y) = 3x - y$ ، $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 ;\ g(x, y) = x - y$

(a) برهن ان g ، h خطيان .

(b) برهن ان $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ المعرف بالشكل التالي :

$f((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = g(x_1, y_1) h(x_2, y_2)$ هو تطبيق مزدوج الخطية .

(21) ليكن V فضاءً شعاعياً على الحقل K ، وليكن V_1 فضاءً

شعاعياً جزئياً من V ، لكل $a \in V$ نعرف $a + V_1 = \{ a + x : x \in V_1 \}$

ونسميها مجموعة مشاركة للفضاء الشعاعي الجزئي V_1 المحدد من قبل العنصر a.

نرمز لمجموعة جميع المجاميع المشاركة بالنسبة لـ V_1 بالرمز $\mathcal{V}$ ، ولنعرف

عملية جمع مجموعتين مشاركتين والضرب بمقدار سلمي كما يلي :

$\forall a, b \in V ;\ (a + V_1) + (b + V_1) = (a + b) + V_1$ ، $\forall \lambda \in K ,\ \lambda (a + V_1) = \lambda a + V_1$

(a) برهن ان $\mathcal{V}$ هو فضاء شعاعي على الحقل K بالنسبة لهاتين العمليتين.

(b) برهن ان $a - b \in V_1 \iff a + V_1 = b + V_1$ لاحظ $\mathcal{V} = V / V_1$.

(22) في الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^2$ على الحقل $\mathbb{R}$. لتكن $V_1 = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$

فضاءً شعاعياً جزئياً من $\mathbb{R}^2$ ، اوجد $\mathbb{R}^2 / V_1$.

الفصل الثالث
المصفوفات والمحددات

1.3 خواص أولية

1.1.3 تعريف

ليكن K حقلاً ، وليكن m ، n عددين طبيعين، ولنأخذ جميع المقادير السلمية a_{ij} من الحقل K حيث $i = 1, \ldots, m$ ، $j = 1, \ldots, n$ ولنشكل الجدول التالي :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

نسمي هذا الجدول مصفوفة . نسمي مجموعة العناصر التي لها نفس الدليل الأول سطراً ، ومجموعة العناصر التي لها نفس الدليل الثاني عموداً ، ونقول عندئذ ان المصفوفة هي ذات m سطر و n عمود .

نلاحظ ان a_{ij} هو عنصر من الحقل K وبذلك فأننا نعتبر أعمدة المصفوفة اعلاه أشعة من الفضاء K^m ، وأسطر المصفوفة اعلاه أشعة من الفضاء K^n . لنلاحظ ان العنصر a_{ij} هو عنصر من المصفوفة يقع في السطر i والعمود j . نرمز عادة للمصفوفات بالأحرف A ، B ، ... الخ . ونرمز لمصفوفة كهذه عادة بالرمز $A = (a_{ij})$.

نسمي المصفوفة التي عدد أسطرها m وعدد أعمدتها n بمصفوفة من الدرجة $m \times n$. ونرمز لمجموعة المصفوفات ذي m سطراً و n عموداً ذي العناصر من الحقل K بالرمز $M_{m,n}(K)$.
نقول عن المصفوفتين $A = (a_{ij})$ ، $B = (b_{ij})$ من المجموعة $M_{m,n}(K)$ انهما متساويتان ، واذا كانت عناصرهما المناظرة متساوية ، اي انه $a_{ij} = b_{ij}$ لكل $i = 1, \dots, m$ ، $j = 1, \dots, n$.
نلاحظ هنا ان المصفوفتين المتساويتين يجب ان تكونا من نفس الدرجة.

2.1.3 تعريف

نقول عن المصفوفة $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$ بأنها مصفوفة صفرية واذا كان $a_{ij} = 0$ لكل $i = 1, \dots, m$ ، $j = 1, \dots, n$.
نقول عن المصفوفة $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$ بأنها مصفوفة مربعة اذا كان $n = m$ ، عندئذ يسمى n بدرجة المصفوفة A .
وتسمى العناصر a_{nn} ، ... ، a_{22} ، a_{11} بالقطر الرئيسي للمصفوفة A.
نسمي المصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

والتي تكون عناصرها الواقعة تحت القطر الرئيسي اصفاراً ، بمصفوفة مثلثية علوية .

ونسمي المصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

والتي تكون عناصرها الواقعة فوق القطر الرئيسي اصفاراً ، بمصفوفة مثلثية سفلية .

ونسمي المصفوفة التي تكون جميع عناصرها اصفاراً عدا القطر الرئيسي ، مصفوفة قطرية .

ونسمي المصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$$

مصفوفة سلمية،

وعندما $\lambda = 1$ نقول ان A هي مصفوفة الوحدة ، ونرمز لها بالرمز I_n .

نقول عن المصفوفة $A = (a_{ij})$ انها مصفوفة متماثلة اذا كان $a_{ij} = a_{ji}$ لكل i,j .

2 . 3 المصفوفات والتطبيقات الخطية

1 . 2 . 3 تعريف .

ليكن V_1 ، V_2 فضاءين شعاعيين على نفس الحقل K بعدين n ، m على التوالي . ولتكن $\{v_1, \dots, v_n\}$ اساساً في V_1 ، $\{u_1, \dots, u_m\}$ أساساً في V_2 . وليكن $f: V_1 \to V_2$ تطبيقاً خطياً ، فأن $f(v_1), \dots, f(v_n) \in V_2$ اي ان :

$$f(v_1) = a_{11} u_1 + a_{21} u_2 + \cdots + a_{m1} u_m$$

$$f(v_2) = a_{12} u_1 + a_{22} u_2 + \cdots + a_{m2} u_m$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f(v_n) = a_{1n} u_1 + a_{2n} u_2 + \cdots + a_{mn} u_m$$

حيث $a_{ij} \in K$.

فأن المصفوفة

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{pmatrix}$$ تسمى المصفوفة

المرافقة للتطبيق الخطي f بالنسبة للأساس $\{v_1, \dots, v_n\}$ في V_1 والاساس $\{u_1, \dots, u_n\}$ في V_2 . ونقول بأختصار المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي f واذا كان اساس V_1 ، V_2 معلومين . ويقال عن f انه التطبيق الخطي المرافق للمصفوفة A .

نلاحظ ان العمود j في هذه المصفوفة هو مركبات الشعاع v_j وفق التطبيق الخطي f في الاساس $\{u_1, \dots, u_m\}$. اي ان عدد الأعمدة في المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي f هو عدد اشعة اساس V_1 الذي هو n ، بينما عدد الاسطر في المصفوفة A يحددها عدد اشعة اساس V_2 والذي هو m. نرمز أحياناً للمصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي f بالرمز $M(f)$.

من التعريف فأنه واذا كان V_1 فضاءً شعاعياً ذا بعد n على الحقل K ، V_2 فضاءً شعاعياً ذا بعد m على الحقل K، فأنه لكل $f \in L(V_1, V_2)$ توجد مصفوفة $A \in M_{m,n}(K)$ مرافقة لهذا التطبيق الخطي، وبذلك فأنه $\varphi : L(V_1, V_2) \to M_{m,n}(K)$ والمعرف كمايلي :

$$\forall f \in L(V_1, V_2) \quad , \quad \varphi(f) = M(f) = A$$

حيث $A \in M_{m,n}(K)$ ، هو تطبيق لأنه :

لكل $f, g \in L(V_1, V_2)$ لنفرض ان $A = (a_{ij})$ مصفوفة مرافقة للتطبيق الخطي f ، $B = (b_{ij})$ مصفوفة مرافقة للتطبيق الخطي

g ، فأذا كان $f = g$ فأن $f(v_j) = g(v_j)$ لكل $j = 1, \dots, n$ فأن:

$$a_{1j} u_1 + \dots + a_{mj} u_m = b_{1j} u_1 + \dots + b_{mj} u_m$$

على فرض ان $\{u_1, \dots, u_m\}$ اساس في V_2 فأن :

$$(a_{1j} - b_{1j}) u_1 + \dots + (a_{mj} - b_{mj}) u_m = 0$$

فأن $a_{ij} - b_{ij} = 0$ لكل $i = 1, \dots, m$ ، $j = 1, \dots, n$ ومنه نستنتج ان $a_{ij} = b_{ij}$ لكل $i = 1, \dots, m$ ، $j = 1, \dots, n$ ، فأن $A = B$ وبذلك $\varphi(f) = \varphi(g)$.

وبالعكس لتكن

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

مصفوفة من $M_{m,n}(K)$

ولنأخذ K^n وأساسه النظامي $\{e_1, \dots, e_n\}$ ، K^m وأساسه النظامي $\{l_1, \dots, l_m\}$ ، ولنأخذ الأشعة $y_1, \dots, y_n \in K^m$ فأنه يوجد $b_{ij} \in K$ بحيث :

$$y_1 = b_{11} l_1 + b_{21} l_2 + \dots + b_{m1} l_m$$
$$y_2 = b_{12} l_1 + b_{22} l_2 + \dots + b_{m2} l_m$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$y_n = b_{1n} l_1 + b_{2n} l_2 + \dots + b_{mn} l_m$$

فأنه حسب (1.3.2) يوجد تطبيق خطي وحيد $f : K^n \to K^m$ بحيث $f(e_i) = y_i$ لكل $i = 1, \dots, n$.

من هنا فأن :

$$f(e_1) = b_{11} l_1 + b_{21} l_2 + \dots + b_{m1} l_m$$
$$f(e_2) = b_{12} l_1 + b_{22} l_2 + \dots + b_{m2} l_m$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$f(e_n) = b_{1n} l_1 + b_{2n} l_2 + \dots + b_{mn} l_m$$

وحيث ان $\{e_1,\dots,e_n\}$ اساس في K^n و $\{l_1,\dots,l_m\}$ اساس في K^m ، فأن المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي f هي :

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$ حيث $B \in M_{m,n}(K)$.

فأنه لكل مصفوفة ذي m سطر و n عمود يوجد تطبيق خطي وحيد لفضاء شعاعي ذو بعد n في فضاء شعاعي ذو بعد m ، وبهذا فأنه يوجد تطبيق h ، بحيث : $h: M_{m,n}(K) \longrightarrow L(K^n, K^m)$:

$$\forall A \in M_{m,n}(K) \quad \exists f \in L(K^n, K^m) \quad , \quad h(A)=f$$

مثال 2.2.3

ليكن IR^2 ، IR^3 فضاءين شعاعيين على نفس الحقل IR ، وليكن $f: IR^2 \to IR^3$ تطبيقاً معرفاً كالآتي :

$$\forall (x,y) \in IR^2 \quad , \quad f(x,y)=(x-y \ , 2x+y \ , x+3y)$$

واضح ان f تطبيق خطي من IR^2 في IR^3 .

لتكن $\{e_1=(1,0) \ , e_2=(0,1)\}$ اساساً نظامياً في IR^2 ، ولتكن $\{l_1=(1,0,0), l_2=(0,1,0), l_3=(0,0,1)\}$ اساساً نظامياً في IR^3 فأن :-

$$f(e_1)=f(1,0)=(1,2,1)=a_{11}l_1+a_{21}l_2+a_{31}l_3=a_{11}(1,0,0)+a_{21}(0,1,0)+a_{31}(0,0,1)$$

$$f(e_2)=f(0,1)=(-1,1,3)=a_{12}l_1+a_{22}l_2+a_{32}l_3=a_{12}(1,0,0)+a_{22}(0,1,0)+a_{32}(0,0,1)$$

فأن $a_{11}=1$ ، $a_{21}=2$ ، $a_{31}=1$ ، $a_{12}=-1$ ، $a_{22}=1$ ، $a_{32}=3$.

لذلك فأن المصفوفة A المرافقة للتطبيق الخطي f هي :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

وهي ذات عمودين (عدد اشعة اساس IR^2) وثلاثة اسطر (عدد اشعة اساس IR^3) ، اي ان $A \in M_{3,2}(IR)$.

وبالعكس لنبدأ الآن بأي مصفوفة : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(IR)$

ولنأخذ الفضاء الشعاعي IR^2 وأساسه النظامي $\{e_1 , e_2\}$ والفضاء الشعاعي IR^3 وأساسه النظامي $\{l_1, l_2, l_3\}$ (كلاهما على الحقل IR).

ولتكن y_1 , y_2, y_3 اشعة ما من IR^2 فأنه حسب (1.3.2) يوجد تطبيق خطي وحيد $f : IR^3 \to IR^2$ بحيث $f(l_i)=y_i$ ، $i=1,2,3$.

اي ان :

$$f(l_1) = y_1 = a_1 e_1 + a_2 e_2 = (a_1 , a_2)$$

$$f(l_2) = y_2 = b_1 e_1 + b_2 e_2 = (b_1 , b_2)$$

$$f(l_3) = y_3 = c_1 e_1 + c_2 e_2 = (c_1 , c_2)$$

حيث a_i ، b_i ، $c_i \in IR$. فأنه لكل $(x, y, z) \in IR^3$ ،

$$f(x, y, z) = f(x l_1 + y l_2 + z l_3) = x f(l_1) + y f(l_2) + z f(l_3) =$$

$$= (a_1 x, a_2 x) + (b_1 y, b_2 y) + (c_1 z, c_2 z) = (a_1 x + b_1 y + c_1 z , a_2 x + b_2 y + c_2 z)$$

وهذه هي الصيغة العامة للتطبيق الخطي من IR^3 في IR^2 .

فأن :

$$f(1,0,0) = (a_1, a_2) = a_{11} e_1 + a_{21} e_2 = 2(1,0) + 0(0,1) = (2,0)$$

$$f(0,1,0) = (b_1, b_2) = a_{12} e_1 + a_{22} e_2 = 1(1,0) + 1(0,1) = (1,1)$$

$$f(0,0,1) = (c_1, c_2) = a_{13} e_1 + a_{32} e_2 = -1(1,0) + 1(0,1) = (-1,1)$$

فأن $a_1 = 2$ ، $a_2 = 0$ ، $b_1 = 1$ ، $b_2 = 1$ ، $c_1 = -1$ ، $c_2 = 1$.

بهذا $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; f(x,y,z) = (2x + y - z , y + z)$

3.2.3 نظرية

(1) المصفوفة المرافقة للتطبيق الصفري هي المصفوفة الصفرية .

(2) المصفوفة المرافقة للتطبيق الحيادي هي المصفوفة الحيادية .

البرهان :

(1) ليكن V_1 فضاءً شعاعياً على الحقل K ، ذا الاساس $\{v_1, \dots, v_n\}$ ، V_2 فضاءً شعاعياً على الحقل K ذا الاساس $\{u_1, \dots, u_m\}$ ، وليكن $f_0 : V_1 \to V_2$ تطبيقاً معرفاً كالآتي:

$$\forall v \in V_1 \quad , \quad f_0(v) = 0$$

فأن :

$$f_0(v_1) = 0 = 0.u_1 + \dots + 0.u_m$$

$$f_0(v_2) = 0 = 0.u_1 + \dots + 0.u_m$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$f_0(v_n) = 0 = 0.u_1 + \dots + 0.u_m$$

فأن المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي f_0 هي :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$ وهي المصفوفة الصفرية.

(2) ليكن $V_1 = V_2$ وليكن $f: V_1 \to V_1$ تطبيقاً معرفاً كالآتي: $\forall v \in V_1 \quad , \quad f(v) = v$

فأن:

$$f(v_1) = v_1 = 1.v_1 + 0.v_2 + \cdots + 0.v_n$$

$$f(v_2) = v_2 = 0.v_1 + 1.v_2 + \cdots + 0.v_n$$

- -

$$f(v_n) = v_n = 0.v_1 + 0.v_2 + \cdots + 1.v_n$$

فأن المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي f هي:

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

وهي المصفوفة الحيادية.

(و. هـ. م.)

4.2.3 تعريف

نعرف مرتبة المصفوفة A بأنها رتبة التطبيق الخطي المرافق للمصفوفة A، ونرمز لمرتبة A بالرمز $rank(A)$.

3.3 الفضاء الشعاعي للمصفوفات

1.3.3 تعريف

ليكن K حقلاً، ولتكن $A, B \in M_{m,n}(K)$، $\{u_1, \ldots, u_m\}$ اساساً للفضاء الشعاعي K^m، $\{v_1, \ldots, v_n\}$ اساساً للفضاء الشعاعي K^n. وليكن f تطبيقاً خطياً مرافقاً للمصفوفة A و g تطبيقاً خطياً مرافقاً للمصفوفة B. برهننا في (5.2) ان $f+g$ تطبيق خطي وهو عنصر من $L(K^n, K^m)$.

لتكن

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

حيث $a_{ij} , b_{ij} \in K$.

لكل $v_j \in \{v_1, \ldots, v_n\}$ فأن :

$$(f+g)(v_j) = f(v_j) + g(v_j)$$

و

$$(f+g)(v_1) = f(v_1) + g(v_1) = (a_{11}u_1 + \cdots + a_{m1}u_m) + (b_{11}u_1 + \cdots + b_{m1}u_m)$$
$$= (a_{11}+b_{11})u_1 + \cdots + (a_{m1}+b_{m1})u_m$$

$$(f+g)(v_2) = f(v_2) + g(v_2) = (a_{12}u_1 + \cdots + a_{m2}u_m) + (b_{12}u_1 + \cdots + b_{m2}u_m)$$
$$= (a_{12}+b_{12})u_1 + \cdots + (a_{m2}+b_{m2})u_m$$

- -

$$(f+g)(v_n) = f(v_n) + g(v_n) = (a_{1n}u_1 + \cdots + a_{mn}u_m) + (b_{1n}u_1 + \cdots + b_{mn}u_m)$$
$$= (a_{1n}+b_{1n})u_1 + \cdots + (a_{mn}+b_{mn})u_m$$

فأن المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي $f+g$ ولتكن C هي :

$$C = \begin{pmatrix} (a_{11}+b_{11}) & (a_{12}+b_{12}) & \cdots & (a_{1n}+b_{1n}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (a_{m1}+b_{m1}) & (a_{m2}+b_{m2}) & \cdots & (a_{mn}+b_{mn}) \end{pmatrix}$$

تسمى المصفوفة C حاصل جمع المصفوفتين A ، B

ونكتب $C = A + B$.

نلاحظ ان العمود الذي ترتيبه j في المصفوفة C يتكون بأيجاد

مركبات $f(v_j)$ ، $g(v_j)$ في الاساس $\{u_1, \ldots, u_m\}$ ومن ثم

جمعها ، فنضاف لذلك العنصر a_{ij} في المصفوفة A الى العنصر b_{ij} من المصفوفة B . من هنا نرى ان :

$$M(f+g) = C = A+B = M(f) + M(g)$$

2.3.3 تعريف

لتكن $A=(a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$ ، وليكن f تطبيقاً خطياً مرافقاً للمصفوفة A ، اي ان f هو تطبيق خطي من K^n في K^m.

فاذا كان $\lambda \in K$ فاننا برهنا في (1.3.2) ان λf تطبيق خطي . لنحسب المصفوفة المرافقة للتطبيق λf .

لتكن $\{v_1,\dots,v_n\}$ اساساً في K^n ، $\{u_1,\dots,u_m\}$ اساساً في K^m ، فان :

$$(\lambda f)(v_1) = \lambda(f(v_1)) = \lambda(a_{11}u_1 + \dots + a_{m1}u_m) =$$
$$= \lambda a_{11}u_1 + \dots + \lambda a_{m1}u_m$$
$$(\lambda f)(v_2) = \lambda(f(v_2)) = \lambda(a_{12}u_1 + \dots + a_{m2}u_m)$$
$$= \lambda a_{12}u_1 + \dots + \lambda a_{m2}u_m$$

- -

$$(\lambda f)(v_n) = \lambda(f(v_n)) = \lambda(a_{1n}u_1 + \dots + a_{mn}u_m)$$
$$= \lambda a_{1n}u_1 + \dots + \lambda a_{mn}u_m$$

فان المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي λf ولتكن B هي :

$$B = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix} = (\lambda a_{ij})$$

وتسمى المصفوفة B ، مصفوفة حاصل ضرب المصفوفة A بالمقدار السلمي λ ونكتب $B = \lambda A$.

3.3.3 تعريف

ليكن K حقلاً ، المجموعة $M_{m,n}(K)$ هي مجموعة مغلقة وتجميعية وتبديلية بالنسبة لعملية جمع المصفوفات ، حيث المصفوفة الصفرية عنصرها الحيادي ، ولكل مصفوفة $A \in M_{m,n}(K)$ فأن المصفوفة $-A \in M_{m,n}(K)$ هي نظير A بالنسبة للجمع. فأن المجموعة $M_{m,n}(K)$ وعملية جمع المصفوفات هي زمرة ابلية. مباشرة من (2.3.3) نستنتج ان ضرب المصفوفة بمقدار سلمي يحقق الخواص التالية :-

$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in K \;,\; \forall A_1, A_2 \in M_{m,n}(K)$;

(1) $\lambda_1 (A_1 + A_2) = \lambda_1 A_1 + \lambda_1 A_2$

(2) $(\lambda_1 + \lambda_2) A_1 = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_1$

(3) $\lambda_1 (\lambda_2 A_1) = (\lambda_1 \lambda_2) A_1$

(4) $1 . A_1 = A_1$

فأن المجموعة $M_{m,n}(K)$ هي فضاء شعاعي على الحقل K يسمى بالفضاء الشعاعي للمصفوفات .

4.3 جداء المصفوفات

1.4.3 تعريف

ليكن V_1 ، V_2 ، V_3 ثلاث فضاءات شعاعية على نفس الحقل K ، ولتكن $\{k_1,\dots,k_m\}$ أساسا في V_1 ، $\{l_1,\dots,l_n\}$ اساسا في V_2 ، و $\{h_1,\dots,h_r\}$ اساسا في V_3 ، وليكن f تطبيقا خطيا من V_1 في V_2 ، $A=(\alpha_{ij})$ المصفوفة المرافقة للتطبيق f ، وليكن g تطبيقا خطيا من V_2 في V_3 ، $B=(\gamma_{ij})$ هي المصفوفة المرافقة للتطبيق g . برهنا في (3.1.2) أن تركيب تطبيقين خطيين هو تطبيق خطي ، لذلك $\varphi = g\circ f$ هو تطبيق خطي من V_1 في V_3 . لنجد المصفوفة C المرافقة للتطبيق φ .

نلاحظ ان :

$$A=(\alpha_{ij})=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1m}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2m}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nm}\end{pmatrix} ,\quad B=(\gamma_{ij})=\begin{pmatrix}\gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1n}\\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \gamma_{r1} & \gamma_{r2} & \cdots & \gamma_{rn}\end{pmatrix}$$

لكي نحصل على اعمدة C نوجد مركبات الاشعة $\{k_1,\dots,k_m\}$ وفق التطبيق الخطي $\varphi = g\circ f$ في الاساس $\{h_1,\dots,h_r\}$ فأن :

$$\varphi(k_1) = (g\circ f)(k_1) = g(f(k_1)) = g(\alpha_{11} l_1 + \alpha_{21} l_2 + \cdots + \alpha_{n1} l_n)$$

$$= \alpha_{11}\, g(l_1) + \alpha_{21}\, g(l_2) + \cdots + \alpha_{n1}\, g(l_n)$$

$$= \alpha_{11}(\gamma_{11} h_1 + \gamma_{21} h_2 + \cdots + \gamma_{r1} h_r) + \alpha_{21}(\gamma_{12} h_1 + \gamma_{22} h_2 + \cdots + \gamma_{r2} h_r) +$$

$$+ \cdots + \alpha_{n1}(\gamma_{1n} h_1 + \gamma_{2n} h_2 + \cdots + \gamma_{rn} h_r)$$

$$= (\alpha_{11}\gamma_{11} + \alpha_{21}\gamma_{12} + \dots + \alpha_{n1}\gamma_{1n})h_1 + \dots + (\alpha_{11}\gamma_{r1} + \alpha_{21}\gamma_{r2} + \dots + \alpha_{n1}\gamma_{rn})h_r$$

- -

$$\varphi(k_m) = (g\circ f)(k_m) = g(f(k_m)) = g(\alpha_{1m}l_1 + \alpha_{2m}l_2 + \dots + \alpha_{nm}l_n)$$

$$= \alpha_{1m}g(l_1) + \alpha_{2m}g(l_2) + \dots + \alpha_{nm}g(l_n)$$

$$= \alpha_{1m}(\gamma_{11}h_1 + \dots + \gamma_{r1}h_r) + \alpha_{2m}(\gamma_{12}h_1 + \dots + \gamma_{r2}h_r) + \dots + \alpha_{nm}(\gamma_{1n}h_1 + \dots + \gamma_{rn}h_r)$$

$$= (\gamma_{11}\alpha_{1m} + \dots + \gamma_{1n}\alpha_{nm})h_1 + \dots + (\gamma_{r1}\alpha_{1m} + \dots + \gamma_{rn}\alpha_{nm})h_r$$

فأن المصفوفة C الموافقة للتطبيق الخطي φ هي :

$$C = \begin{pmatrix} (\gamma_{11}\alpha_{11} + \dots + \gamma_{1n}\alpha_{n1}) & \dots & (\gamma_{11}\alpha_{1m} + \dots + \gamma_{1n}\alpha_{nm}) \\ \dots & \dots & \dots \\ (\gamma_{r1}\alpha_{11} + \dots + \gamma_{rn}\alpha_{n1}) & \dots & (\gamma_{r1}\alpha_{1m} + \dots + \gamma_{rn}\alpha_{nm}) \end{pmatrix}$$

نسمي المصفوفة C ، بمصفوفة حاصل ضرب المصفوفة B في المصفوفة A ونكتب $BA = C$.

اي ان :

$$\begin{pmatrix} \gamma_{11} & \dots & \gamma_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{r1} & \dots & \gamma_{rn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{11}\alpha_{11} + \dots + \gamma_{1n}\alpha_{n1} & \dots & \gamma_{11}\alpha_{1m} + \dots + \gamma_{1n}\alpha_{nm} \\ \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{r1}\alpha_{11} + \dots + \gamma_{rn}\alpha_{n1} & \dots & \gamma_{r1}\alpha_{1m} + \dots + \gamma_{rn}\alpha_{nm} \end{pmatrix}$$

لنلاحظ هنا ان : $M(g\circ f) = C = BA = M(g) \cdot M(f)$.

ونلاحظ انه حتى نتمكن من ان نجد حاصل ضرب المصفوفة B في المصفوفة A يجب ان يكون عدد الاعمدة من المصفوفة B مساويا لعدد الأسطر في المصفوفة A ، وهذا ناتج

من أن f هو تطبيق من V_1 في V_2 و g هو تطبيق من V_2 في V_3 .

2.4.3 ملاحظة

ليكن V_1 ، V_2 فضاءين شعاعيين على نفس الحقل K ، ولتكن $\{v_1, \dots, v_n\}$ اساسا في V_1 ، $\{u_1, \dots, u_m\}$ اساسا في V_2 . وليكن f تطبيقا خطيا من V_1 في V_2 ، $A = (a_{ij})$ المصفوفة المرافقة للتطبيق f .

لكل $x \in V_1$ فأن $x = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ حيث $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ فأن المصفوفة التي تمثل مركبات الشعاع x في الاساس $\{v_1, \dots, v_n\}$ تكون مصفوفة ذات عمود واحد و n سطرا ونكتب :

$$X = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

وحيث ان $f(x) \in V_2$ فأن : $y = f(x) = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_m u_m$ ، المصفوفة التي تمثل مركبات $f(x)$ في الاساس $\{u_1, \dots, u_m\}$ هي :

$$Y = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}$$

من هنا فأن :

$$y = f(x) = f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) =$$
$$= \lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_n f(v_n) = \lambda_1 (a_{11} u_1 + \dots + a_{m1} u_m) + \dots + \lambda_n (a_{1n} u_1 + \dots + a_{mn} u_m)$$
$$= (a_{11}\lambda_1 + \dots + a_{1n}\lambda_n) u_1 + \dots + (a_{m1}\lambda_1 + \dots + a_{mn}\lambda_n) u_m$$

بما ان $\{u_1, \ldots, u_m\}$ هو اساس في V_2 ، فانه حسب (3 . 5 . 1)
كل شعاع يكتب بشكل وحيد بشكل مزج خطي لأشعة
الأساس فأن :

$$\alpha_1 = a_{11}\lambda_1 + \cdots + a_{1n}\lambda_n$$

- - - - - - - - - - - - - - - -

$$\alpha_m = a_{m1}\lambda_1 + \cdots + a_{mn}\lambda_n$$

فأن :

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

اي ان $Y = AX$

5 . 3 المصفوفة المربعة

في (2 . 1 . 3) قلنا ان المصفوفة التي يتساوى عدد اعمدتها وعدد اسطرها تسمى مصفوفة مربعة .
نلاحظ ان المصفوفة المربعة هي مصفوفة مرافقة لتطبيق خطي من فضاء في فضاء أخر ذي بعدين متساويين .
نرمز لمجموعة المصفوفات المربعة من الدرجة n ذي العناصر من الحقل K بالرمز $M_n(K)$.

1 . 5 . 3 تعريف

ليكن K حقلاً ، لأي $A, B, C \in M_n(K)$ ، اذا كان f_1 هو التطبيق الخطي المرافق للمصفوفة A ، f_2 هو التطبيق الخطي المرافق للمصفوفة B ، f_3 هو التطبيق الخطي

الموافقة للمصفوفة C ، فأنه :

$$A.(B.C) = (M(f_1))(M(f_2).M(f_3)) = (M(f_1))(M(f_2 \circ f_3)) =$$
$$= M(f_1 \circ (f_2 \circ f_3)) = M((f_1 \circ f_2) \circ f_3) = (M(f_1).M(f_2)).(M(f_3))$$
$$= (A.B).C$$

وأن :

$$C(A+B) = M(f_3)(M(f_1) + M(f_2)) = M(f_3)(M(f_1+f_2)) =$$
$$= M(f_3 \circ (f_1+f_2)) = M((f_3 \circ f_1) + (f_3 \circ f_2)) =$$
$$= M(f_3 \circ f_1) + M(f_3 \circ f_2) = C.A + C.B$$

بنفس الطريقة نبرهن أن : $(A+B).C = A.C + B.C$

استناداً الى ما سبق نستنتج ان $M_n(K)$ هي حلقة بالنسبة لعمليتي جمع وضرب المصفوفات . بصورة عامة جداء المصفوفات ليست تبديلية لأن تركيب التطبيقات الخطية ليست تبديلية .

2.5.3 تعريف

ليكن K حقلاً ، $A \in M_n(K)$ ، فأذا وجدت مصفوفة $B \in M_n(K)$ بحيث $A.B = B.A = I_n$ عندئذ نقول ان المصفوفة A عكوس في الحلقة $M_n(K)$ ، وتسمى المصفوفة B نظير A ونرمز له بالرمز A^{-1} .

3.5.3 نظرية

ليكن K حقلاً ، ولتكن $A, B \in M_n(K)$ ، فأذا كان A ، B عكوسين فأن المصفوفة AB عكوس .

البرهان :

بما أن : $(B^{-1}A^{-1})(AB) = (B^{-1}(A^{-1}A))B = B^{-1}B = I_n$

وكذلك :

$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = I_n$

فأن AB عكوس ونظيرها هو $B^{-1}A^{-1}$.

(و. هـ. م.)

4.5.3 نتيجة

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

البرهان :

$$\begin{aligned}(AB)^{-1} &= (AB)^{-1}I_n \\ &= (AB)^{-1}\left((AB)(B^{-1}A^{-1})\right) = \left((AB)^{-1}(AB)\right)(B^{-1}A^{-1}) \\ &= I_n B^{-1}A^{-1} \\ &= B^{-1}A^{-1}\end{aligned}$$

(و. هـ. م.)

5.5.3 نظرية

ليكن K حقلاً ، ولتكن $A \in M_n(K)$ ، وليكن f تطبيقاً خطياً مرافقاً للمصفوفة A فأن الشروط التالية متكافئة :

(1) A عكوس

(2) f تقابل

(3) اشعة اعمدة المصفوفة A مستقلة خطياً .

(4) $rank(A) = n$.

البرهان :

سنبرهن على تكافؤ كل من هذه الشروط مع الشرط (1) ، وبذلك نحصل على تكافؤ جميع الشروط .

ليكن f تطبيقاً خطياً من K^n في K^n ، وليكن $\{e_1,\dots,e_n\}$ اساساً نظامياً في K^n .

نبرهن (1) $\leftrightarrow$ (2)

نفرض ان A عكوس ، ولتكن B نظير A^{-1} ، اي ان $BA = AB = I_n$. وليكن h تطبيقاً خطياً مرافقاً للمصفوفة B ، فانه حسب (1.4.3) يكون $hof = foh = Id_{K^n}$ فانه حسب (7.3.2) يكون f تقابل .

نفرض الآن ان f تقابل ، فاذا كانت المصفوفة C هي المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي f^{-1} ، فاننا نجد أن: $fof^{-1} = f^{-1}of = Id_{K^n}$ ، فانه حسب (1.4.3) نستنتج ان $A\cdot C = C\cdot A = I_n$ ، بذلك A عكوس .

نبرهن (1) $\leftrightarrow$ (3)

حسب (2.3.2) f تقابل $\Leftrightarrow$ صورة اساس في K^n هي اساس في K^n . اي ان f تقابل $\Leftrightarrow \{f(e_1),\dots,f(e_n)\}$ أساس في K^n . اي ان f تقابل $\Leftrightarrow f(e_1),\dots,f(e_n)$ مستقلة خطياً .

وبذلك فأن A عكوس ⟺ f تقابل ⟺ $f(e_1),\dots,f(e_n)$ مستقلة خطياً ، أي ان : A عكوس ⟺ اشعة اعمدة A مستقلة خطياً.

نبرهن (1) ⟷ (4)

$rank(A) = n = rank(f)$ ⟺ f تقابل ⟺ A عكوس .

(و.هـ.م.)

نلاحظ من هنا ان رتبة المصفوفة A هو العدد الاعظمي للأشعة المستقلة خطياً والتي يمكن الحصول عليها من اشعة اعمدة المصفوفة A .

6.3 منقول وأثر المصفوفة

ليكن K حقلاً ، ولتكن $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$ ، منقول المصفوفة A هي المصفوفة $B = (b_{ji})$ حيث $B \in M_{n,m}(K)$ و $a_{ij} = b_{ji}$. اي اننا نجعل اعمدة A اسطراً في B ، وأسطر A اعمدة في B . ونرمز لمنقول المصفوفة A بالرمز A^T .

اذا كانت $A = A^T$ عندئذ نقول ان المصفوفة A هي مصفوفة متناظرة ، ونلاحظ ان $(A^T)^T = A$.

لكل $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ نعرف اثر المصفوفة A بأنه مجموع عناصر القطر الرئيسي في المصفوفة A ، ونرمز له بالرمز $Tr(A)$ وبذلك فأن :

$$Tr(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$$

من هنا فأنه يمكن البرهان بسهولة على ان :(تمرين (7)) .

$\forall A,B \in M_{m,n}(K) \quad , \quad (A+B)^T = A^T + B^T$ (1)

$\forall A \in M_{m,n}(K) \quad , \quad \forall B \in M_{n,p}(K) \, , (AB)^T = B^T . A^T$ (2)

$\forall \lambda \in K \quad , \quad \forall A \in M_{m,n}(K) \quad , (\lambda A)^T = \lambda A^T$ (3)

$\forall A,B \in M_n(K) \quad , \quad Tr(A+B) = Tr(A) + Tr(B)$ (4)

$\forall \lambda \in K \, , \, \forall A \in M_n(K) \quad , Tr(\lambda A) = \lambda Tr(A)$ (5)

7.3 مصفوفة العبور

1.7.3 تعريف

ليكن V فضاءاً شعاعياً على الحقل K ، ولتكن $\{v_1,\dots,v_n\}$ ، $\{u_1,\dots,u_n\}$ اساسات في V ، فأنه لكل $i=1,\dots,n$ ، u_i هو مزج خطي للأشعة $\{v_1,\dots,v_n\}$

اي ان :

$$u_1 = a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \dots + a_{n1}v_n$$

$$u_2 = a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + \dots + a_{n2}v_n$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$u_n = a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + \dots + a_{nn}v_n$$

نسمي المصفوفة

$$P = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

مصفوفة العبور من الاساس $\{v_1,\dots,v_n\}$ الى الاساس $\{u_1,\dots,u_n\}$

2.7.3 أمثلة

(1) لتكن $A=\{e_1=(1,0),\ e_2=(0,1)\}$ ، $B=\{l_1=(1,2),\ l_2=(2,3)\}$ اساسان في الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^2$ على الحقل $\mathbb{R}$ فأن :

$$l_1 = a_{11}e_1 + a_{21}e_2$$
$$l_2 = a_{12}e_1 + a_{22}e_2$$

اي ان :

$$(1,2) = a_{11}(1,0) + a_{21}(0,1) = (a_{11}, a_{21})$$
$$(2,3) = a_{12}(1,0) + a_{22}(0,1) = (a_{12}, a_{22})$$

فأن : $a_{11}=1$ ، $a_{21}=2$ ، $a_{12}=2$ ، $a_{22}=3$.

فأن مصفوفة العبور P من الاساس A الى الاساس B هي :

$$P=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}.$$

(2) لتكن الآن $P=\begin{pmatrix}1 & 4\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ مصفوفة العبور من الاساس النظامي في $\mathbb{R}^2$ الى الاساس $\{l_1,l_2\}$. اوجد l_1, l_2 .

$$l_1 = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 = 1(1,0) + (-1)(0,1) = (1,-1)$$
$$l_2 = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 = 4(1,0) + 2(0,1) = (4,2)$$

ومنه $\{l_1=(1,-1),\ l_2=(4,2)\}$.

3.7.3 ملاحظات

(1) من (3.7.1) نلاحظ انه لو اخذنا التطبيق الحيادي Id_V من V على V ، وأذا اعتبرنا $\{u_1,\dots,u_n\}$ اساساً في مجموعة الانطلاق ، $\{v_1,\dots,v_n\}$ اساساً في مجموعة الاستقرار ونرمز لذلك عندئذ كما يلي : $Id_V: V_{\{u_1,\dots,u_n\}} \longrightarrow V_{\{v_1,\dots,v_n\}}$

فأن : $Id_V(u_1)=u_1 \;,\; Id_V(u_2)=u_2 \;,\; \dots \;,\; Id_V(u_n)=u_n$

اي ان :

$$Id_V(u_1)=u_1 = a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \dots + a_{n1}v_n$$
$$Id_V(u_2)=u_2 = a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + \dots + a_{n2}v_n$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$Id_V(u_n)=u_n = a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + \dots + a_{nn}v_n$$

فأن :

$$P=(a_{ij})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

هي مصفوفة مرافقة للتطبيق الخطي Id_V ، وهي في نفس الوقت مصفوفة العبور من الاساس $\{v_1,\dots,v_n\}$ الى الاساس $\{u_1,\dots,u_n\}$.
اي ان مصفوفة العبور هي المصفوفة المرافقة للتطبيق الحيادي.
بما ان Id_V تطبيق تقابل ، فأن P علوس ، P^{-1} هي المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي Id_V^{-1} وبذلك P^{-1} هي مصفوفة العبور من الاساس $\{u_1,\dots,u_n\}$ الى الاساس $\{v_1,\dots,v_n\}$.

(2) في (1.7.3) لكل $x \in \bar{V}$ فأن :

$$x = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \cdots + x_n u_n$$

وكذلك

$$x = y_1 v_1 + y_2 v_2 + \cdots + y_n v_n$$

بالأعتماد على (1) فأن :

$$y_1 v_1 + \cdots + y_n v_n = x = Id_V(x) = Id_V(x_1 u_1 + x_2 u_2 + \cdots + x_n u_n) =$$
$$= x_1 Id_V(u_1) + x_2 Id_V(u_2) + \cdots + x_n Id_V(u_n) =$$
$$= x_1(a_{11} v_1 + \cdots + a_{n1} v_n) + x_2(a_{12} v_1 + \cdots + a_{n2} v_n) + \cdots +$$
$$+ x_n(a_{1n} v_1 + \cdots + a_{nn} v_n)$$

واذن :

$$y_1 v_1 + \cdots + y_n v_n = (x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + \cdots + x_n a_{1n}) v_1 + \cdots + (x_1 a_{n1} + x_2 a_{n2} +$$
$$+ \cdots x_n a_{nn}) v_n$$

فأن :

$$y_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n$$
$$y_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_n = a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \cdots + a_{nn} x_n$$

اي ان :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

فأن :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

حيث $y_1, \dots, y_n$ هي مركبات الشعاع x في الاساس $\{v_1, \dots, v_n\}$
، $x_1, \dots, x_n$ هي مركبات الشعاع x في الاساس $\{u_1, \dots, u_n\}$
، P هي مصفوفة العبور من الأساس $\{v_1, \dots, v_n\}$ الى الاساس
$\{u_1, \dots, u_n\}$.

(3) من (3 . 7 . 1) فأن :

$$u_1 = a_{11} v_1 + a_{21} v_2 + \cdots + a_{n1} v_n$$

$$u_2 = a_{12} v_1 + a_{22} v_2 + \cdots + a_{n2} v_n$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u_n = a_{1n} v_1 + a_{2n} v_2 + \cdots + a_{nn} v_n$$

و

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ هي مصفوفة العبور

من الأساس $\{v_1, \dots, v_n\}$ الى الأساس $\{u_1, \dots, u_n\}$.

لكن من (1) فأن :

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

اي ان :

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = P^T \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

(4) ليكن V_1 ، V_2 فضاءين شعاعيين على نفس الحقل K، وليكن f تطبيقاً خطياً من V_1 في V_2 ، ولتكن $\{v_1, \dots, v_n\}$ ، $\{v'_1, \dots, v'_n\}$ اساسان في V_1 ، $\{u_1, \dots, u_m\}$ ، $\{u'_1, \dots, u'_m\}$ اساسان في V_2 فأن :

$$v'_1 = b_{11} v_1 + b_{21} v_2 + \dots + b_{n1} v_n$$
$$v'_2 = b_{12} v_1 + b_{22} v_2 + \dots + b_{n2} v_n$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$v'_n = b_{1n} v_1 + b_{2n} v_2 + \dots + b_{nn} v_n$$

فأن مصفوفة العبور P من الاساس $\{v_1, \dots, v_n\}$ الى الاساس $\{v'_1, \dots, v'_n\}$ هي :

$$P = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

وكذلك عندنا

$$f(v_1) = a_{11} u_1 + a_{21} u_2 + \dots + a_{m1} u_m$$
$$f(v_2) = a_{12} u_1 + a_{22} u_2 + \dots + a_{m2} u_m$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$f(v_n) = a_{1n} u_1 + a_{2n} u_2 + \dots + a_{mn} u_m$$

فأن المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي f هي :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

فيكون لدينا :

$$\underset{\{v'_1,\dots,v'_n\}}{V_1} \xrightarrow{Id_{V_1}} \underset{\{v_1,\dots,v_n\}}{V_1} \xrightarrow{f} \underset{\{u_1,\dots,u_m\}}{V_2}$$

حيث $M(f) = A$ ، $M(Id_{V_1}) = P$ فأن :

$$M(f \circ Id_{V_1}) = M(f) \cdot M(Id_{V_1}) = AP$$

وفي V_2 نلاحظ ان :

$$u'_1 = c_{11} u_1 + c_{21} u_2 + \dots + c_{m1} u_m$$

$$u'_2 = c_{12} u_1 + c_{22} u_2 + \dots + c_{m2} u_m$$

- -

$$u'_m = c_{1m} u_1 + c_{2m} u_2 + \dots + c_{mm} u_m$$

فأن مصفوفة العبور من الاساس $\{u_1,\dots,u_m\}$ الى الاساس $\{u'_1,\dots,u'_m\}$ هي :

$$Q = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mm} \end{pmatrix}$$

لكن Q هي المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي Id_{V_2} .
فأن المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي $(Id_{V_2})^{-1}$ هي Q^{-1} ،
وهي مصفوفة العبور من الاساس $\{u'_1,\dots,u'_m\}$ الى الاساس $\{u_1,\dots,u_m\}$ ، وبذلك يكون لدينا :

$$\underset{\{v'_1,\dots,v'_n\}}{V_1} \xrightarrow{Id_{V_1}} \underset{\{v_1,\dots,v_n\}}{V_1} \xrightarrow{f} \underset{\{u_1,\dots,u_m\}}{V_2} \xrightarrow{Id^{-1}_{V_2}} \underset{\{u'_1,\dots,u'_m\}}{V_2}$$

حيث $M(Id^{-1}_{V_2}) = Q^{-1}$ ، فأن :

$$M(Id^{-1}_{V_2} \circ f \circ Id_{V_1}) = M(Id^{-1}_{V_2}) \cdot M(f) \cdot M(Id_{V_1}) = Q^{-1} A P$$

فأن المصفوفة $B = Q^{-1}AP$ هي المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي f بالنسبة للأساس $\{v_1', \dots, v_n'\}$ في V_1 والاساس $\{u_1', \dots, u_m'\}$ في V_2 .

وهذه العلاقة نستخدمها عند تغير الاساس لأيجاد المصفوفة المرافقة لتطبيق خطي .

(5) ليكن V فضاءاً شعاعياً على الحقل K ، وليكن $f : V \to V$ تطبيقاً خطياً ، ولتكن $\{v_1, \dots, v_n\}$ ، $\{v_1', \dots, v_n'\}$ اساسان في V . ولتكن A المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي f بالنسبة للأساس $\{v_1, \dots, v_n\}$ ، B المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي f بالنسبة للأساس $\{v_1', \dots, v_n'\}$ ، P مصفوفة العبور من الأساس $\{v_1, \dots, v_n\}$ الى الأساس $\{v_1', \dots, v_n'\}$ ، فأنه من (3) نستنتج ان $B = P^{-1}AP$.

8.3 المحددات

1.8.3 تعريف

ليكن K حقلاً ، ولتكن $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ ، لكل عددين طبيعيين $1 \leq i, j \leq n$ ، نعرف المصفوفة A_{ij} بأنها المصفوفة الناتجة من المصفوفة A وذلك بحذف السطر i والعمود j من المصفوفة A .

2.8.3 تعريف

ليكن K حقلاً ، $f : M_n(K) \to K$ تطبيقاً يحقق الشرطين :-

(1) إذا كانت $A = (a)$ ، $a \in K$ فأن $f(A) = a$

(2) إذا كانت $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ حيث $n > 1$ فأن:

$$f(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \, a_{ij} \, f(A_{ij})$$

لأي عدد طبيعي $1 \leq j \leq n$

نسمي التطبيق f محدد المصفوفة A ونرمز لها بالرمز $\det(A)$.

نلاحظ هنا ان :

$$f(A) = \det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \, a_{ij} \, f(A_{ij})$$

عند تثبيت j لأحد القيم من $1, \ldots, n$.

3.8.3 أمثلة

(1) إذا كانت $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ مصفوفة في $M_2(K)$ حيث K حقل . لنفرض ان $j = 2$ فأن :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{2} (-1)^{i+2} \, a_{i2} \det(A_{i2})$$

$$= (-1)^{1+2} a_{12} \det(A_{12}) + (-1)^{2+2} a_{22} \det(A_{22})$$

$$= (-1) a_{12} a_{21} + a_{22} a_{11} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

(٤) لتكن $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ مصفوفة في $M_3(K)$

وليكن $j = 1$ فأن :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{3} (-1)^{i+1} a_{i1} \det(A_{i1})$$

$$= (-1)^{1+1} a_{11} \det(A_{11}) + (-1)^{2+1} a_{21} \det(A_{21}) + (-1)^{3+1} a_{31} \det(A_{31})$$

$$= a_{11} \det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + (-a_{21}) \det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{31} \det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{21}a_{13}a_{32} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{13}a_{22}$$

وهناك طريقة خاصة مختصرة لإيجاد محدد المصفوفة من الدرجة 3 وهي :

$$\begin{array}{ccccc} & & - & - & - \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ & & + & + & + \end{array}$$

لنوجد محدد A بإيجاد حاصل ضرب العناصر الموجودة على كل سهم مع اعطاء الإشارة الموجودة في نهاية السهم لناتج الضرب ، ثم جمع هذه العناصر .

فأن :

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

4.8.3 نظرية

لتكن $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{pmatrix}$ مصفوفة في $M_n(K)$

فأن :

$$\det(A) = a_{11} a_{22} \cdots a_{(n-1)(n-1)} a_{nn}$$

البرهان :

نبرهن على النظرية بالتراجع بالنسبة للعدد الطبيعي n .

وإذا كان $n=1$ فأن $A = (a_{11})$ ومن التعريف فأن : $\det(A) = a_{11}$.

لنفرض ان النظرية صحيحة من اجل مصفوفة من الدرجة $n-1$

لتكن الآن A مصفوفة من الدرجة n ، من تعريف محدد المصفوفة

فأن :

$$\det(A) = (-1)^{n+n} a_{nn} \det(A_{nn}) = a_{nn} \det(A_{nn})$$

لكن من الفرضية بما ان A_{nn} هي مصفوفة من الدرجة $n-1$

فأن :

$$\det(A_{nn}) = a_{11} a_{22} \cdots a_{(n-1)(n-1)}$$

وبذلك فأن :

$$\det(A) = a_{11} a_{22} \cdots a_{(n-1)(n-1)} a_{nn}$$

(و.هـ.م.)

نتيجة 5.8.3

(1) إذا كانت $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ مصفوفة قطرية

من $M_n(K)$ فأن :

$$\det(A) = a_{11}\, a_{22} \cdots a_{nn}$$

(2) إذا كانت $A = I_n$ فأن :

$$\det(A) = 1$$

تعريف 6.8.3

لتكن $A=(a_{ij})$ مصفوفة مربعة من الدرجة n ،
$B=(b_{ij})$ ، مصفوفة مربعة من الدرجة m ، $C=(c_{ij})$
مصفوفة من الدرجة $n \times m$ ، $D=(d_{ij})$ مصفوفة
من الدرجة $m \times n$ ، حيث a_{ij} ، b_{ij} ، c_{ij} ، $d_{ij} \in K$.
نعرف المصفوفة E من الدرجة $n+m$ كمايلي: $E=(e_{rs})$

حيث :

$$e_{rs} = \begin{cases} a_{ij} & \text{إذا كان } r\le n ، s\le n \\ c_{ij} & \text{إذا كان } r\le n ، s>n \\ d_{ij} & \text{إذا كان } r>n ، s\le n \\ b_{ij} & \text{إذا كان } r>n ، s>n \end{cases} \quad \text{، حيث } r,s = 1,\ldots,n+m$$

نسمي المصفوفة

$$E = \begin{pmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} & c_{11} \cdots c_{1m} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} \cdots a_{nn} & c_{n1} \cdots c_{nm} \\ d_{11} \cdots d_{1n} & b_{11} \cdots b_{1m} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ d_{m1} \cdots d_{mn} & b_{m1} \cdots b_{mm} \end{pmatrix}$$ مصفوفة القوالب

ونرمز لها بالرمز :

$$E=\begin{pmatrix} A & C \\ D & B \end{pmatrix}$$

نظرية 7.8.3

لتكن $E=\begin{pmatrix} A & C \\ D & B \end{pmatrix}$ مصفوفة كما في (6.8.3).
فإذا كانت C هي مصفوفة صفرية ، فأن :

$$\det(E) = \det(A) \cdot \det(B)$$

البرهان :

نبرهن على النظرية بالتراجع بالنسبة للعدد الطبيعي m .
C مصفوفة صفرية معناه $c_{ij} = 0$ لكل $i=1,\dots,n$ ، $j=1,\dots,m$
نرمز عندها للمصفوفة C بالرمز Θ ، وليكن n اي عدد
طبيعي و $m=1$ فأن :

$$\det(E)=\det\begin{pmatrix} A & \Theta \\ D & B \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 \\ d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} & b_{11} \end{pmatrix} = b_{11}\det(A)$$

$$= \det(A).\det(B)$$

لنفرض ان النظرية صحيحة من اجل عدد طبيعي $m-1$. فأن :

$$\det\begin{pmatrix} A & \Theta \\ D & B \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{(n+m)+(n+i)}\, b_{im} \det\begin{pmatrix} A & \Theta \\ D_i & B_{im} \end{pmatrix}$$

حيث B_{im} هي مصفوفة من الدرجة $(m-1)$ ، وبذلك فأن
D_i هي مصفوفة ناتجة من المصفوفة D بحذف السطر i

اي ان D_i هي مصفوفة من الدرجة $(m-1)\times n$.

اي ان المصفوفة $\begin{pmatrix} A & \Theta \\ D_i & B_{im} \end{pmatrix}$ هي مصفوفة من الدرجة $n+(m-1)$

فأنه من الفرضية ينتج ان :

$$\det\begin{pmatrix} A & \Theta \\ D_i & B_{im} \end{pmatrix} = \det(A) \cdot \det(B_{im})$$

من هنا فأن :

$$\det\begin{pmatrix} A & \Theta \\ D & B \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{n+m+n+i} \, b_{im} \det(A) \cdot \det(B_{im})$$

$$= (-1)^{2n} \det(A) \cdot \sum_{i=1}^{m} (-1)^{m+i} \, b_{im} \det(B_{im})$$

$$= \det(A) \cdot \det(B)$$

(و . هـ . م .)

بنفس الطريقة نبرهن على :

8.8.3 نتيجة

اذا كانت A مصفوفة من الدرجة $(m\times n)$ و B مصفوفة من الدرجة $(n\times m)$ و C مصفوفة مربعة من الدرجة m و D مصفوفة مربعة من الدرجة n ، (جميع المصفوفات ذي العناصر من الحقل K) و $E = \begin{pmatrix} A & C \\ D & B \end{pmatrix}$

فأذا كانت $B = \Theta$ فأن :

$$\det(E) = (-1)^{n\cdot m} \det(C) \cdot \det(D)$$

9.8.3 نظرية

ليكن K حقلاً ، ولتكن $A \in M_n(K)$ مصفوفة ، فأن

$$\det(A) = \det(A^T)$$

البرهان :

نبرهن على النظرية بالتراجع بالنسبة للعدد الطبيعي n .

اذا كان $n=1$ فأن $A=(a_{11})$ وبذلك فأن : $\det(A)=\det(A^T)$.

لنفرض ان النظرية صحيحة من اجل $n-1$ ، لتكن $A=(a_{ij})$ مصفوفة مربعة من الدرجة n ، ولتكن $A_{i,n;j,n}$ مصفوفة ناتجة من المصفوفة A وذلك لحذف السطرين i ، n والعمودين j ، n ، فأنه عندئذ :

$$\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i+n} a_{in} \det(A_{in}) = \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i+n} a_{in} \det(A_{in}^T)$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i+n} a_{in}\left(\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{j+n-1} a_{nj} \det(A_{i,n;j,n}^T)\right)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n-1}(-1)^{i+j+2n-1} a_{in} a_{nj} \det(A_{i,n;j,n})$$

وكذلك :

$$\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{j+n} a_{nj} \det((A^T)_{jn}) = \sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{j+n} a_{nj} \det(A_{nj})$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{j+n} a_{nj}\left(\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i+n-1} a_{in} \det(A_{i,n;j,n})\right)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n-1}(-1)^{i+j+2n-1} a_{in} a_{nj} \det(A_{i,n;j,n})$$

من هنا ، فأنه :

$$\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i+n} a_{in} \det(A_{in}) = \sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{j+n} a_{nj} \det((A^T)_{jn})$$

من هنا ، نستنتج ان :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+n} a_{in} \det(A_{in})$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+n} a_{in} \det(A_{in}) + a_{nn} \det(A_{nn})$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{j+n} a_{nj} \det(A^T)_{jn} + a_{nn} \det(A^T)_{nn}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+n} a_{nj} \det(A^T)_{jn} = \det(A^T)$$

(و . هـ . م .)

3.9 المحددات والأشكال الخطية

3.9.1 تعريف

(1) ليكن V فضاء شعاعياً على الحقل K ، وليكن f شكلاً مزدوج الخطية ومتناوب على V . ولتكن $\{v_1, v_2\}$ اساساً في V . لكل $x_1, x_2 \in V$ فأن :

$$x_1 = a_{11} v_1 + a_{21} v_2$$

$$x_2 = a_{12} v_1 + a_{22} v_2$$

حيث $a_{ij} \in K$.

ولتكن $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ مصفوفة مركبات الأشعة x_1 ، x_2 في الاساس $\{v_1, v_2\}$ فأن :

$$f(x_1, x_2) = f(a_{11} v_1 + a_{21} v_2 , a_{12} v_1 + a_{22} v_2).$$

لكن f شكل مزدوج الخطية ومتناوب، فأن :

$$f(x_1, x_2) = (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})\, f(v_1, v_2)$$

فأننا نسمي المقدار $(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})$ محدد مصفوفة مركبات الشعاعين x_1 ، x_2 في الأساس $\{v_1, v_2\}$ ، ونرمز له بالرمز $\det_{\{v_1,v_2\}}(x_1, x_2)$.

(ع) واذا كان V فضاءاً شعاعياً ذا بعد 3 على الحقل K ، $\{v_1, v_2, v_3\}$ اساساً في V ، f تطبيقاً ثلاثي الخطية ومتناوب على V ، فأنه لكل $x_1, x_2, x_3 \in V$:

$$x_1 = a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + a_{31}v_3$$

$$x_2 = a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + a_{32}v_3$$

$$x_3 = a_{13}v_1 + a_{23}v_2 + a_{33}v_3$$

حيث $a_{ij} \in K$ ، ولتكن :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

مصفوفة مركبات الأشعة x_1 ، x_2 ، x_3 في الأساس $\{v_1, v_2, v_3\}$.

بما ان f شكل ثلاثي الخطية ومتناوب ، فأن :

$$f(x_1, x_2, x_3) = f(a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + a_{31}v_3 ,\ a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + a_{32}v_3 ,\ a_{13}v_1 + a_{23}v_2 + a_{33}v_3)$$

$$= [a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{32}a_{13})] \cdot f(v_1, v_2, v_3)$$

فأن :

$$f(x_1, x_2, x_3) = \det(A) \cdot f(v_1, v_2, v_3)$$

نسمي $det(A)$ محدد مصفوفة مركبات الأشعة x_1، x_2، x_3 في الأساس $\{v_1, v_2, v_3\}$ ونرمز له بالرمز $\det_{\{v_1, v_2, v_3\}}(x_1, x_2, x_3)$

(3) إذا كان V فضاءً شعاعياً ذا بعد n على الحقل K، f شكلاً متعدد الخطية ومتناوباً من الدرجة n على V، و $\{v_1, \ldots, v_n\}$ أساساً في V، فإنه لكل $x_1, x_2, \ldots, x_n \in V$ فإن:

$$x_1 = a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \cdots + a_{n1}v_n$$
$$x_2 = a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots + a_{n2}v_n$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_n = a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + \cdots + a_{nn}v_n$$

حيث $a_{ij} \in K$ لكل $i, j = 1, \ldots, n$.
فإن:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = det(A) . f(v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

حيث

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

. نسمي $det(A)$ محدد مصفوفة مركبات الأشعة $x_1, \ldots, x_n$ في الأساس $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ونرمز له بالرمز $\det_{\{v_1, \ldots, v_n\}}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
ونكتب $det(x_1, \ldots, x_n)$ عندما لا يحدث أي التباس بالنسبة للأساس المستعمل .

ملاحظات :

$$\det_{\{v_1,\ldots,v_n\}}(v_1, v_2, \ldots, v_n) =$$

$$= \det_{\{v_1,\ldots,v_n\}}(1.v_1+0.v_2+\cdots+0.v_n \;,\; 0.v_1+1.v_2+\cdots+0.v_n \;,\ldots,\; 0.v_1+\cdots+1.v_n)$$

$$= \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

نظرية 2.9.3

ليكن V فضاءاً شعاعياً بحده $n \geq 2$ على الحقل K ، ولتكن $\{v_1, \ldots, v_n\}$ اساساً في V . لأي أشعة $x_1, \ldots, x_n \in V$ فأن : $\det_{\{v_1,\ldots,v_n\}}(x_1, \ldots, x_n)$ هو شكل متعدد الخطية ومتناوب من الدرجة n على V .

البرهان :

لكل $x_1, \ldots, x_n$ من V ، فأن :

$$x_1 = a_{11}v_1 + \cdots + a_{n1}v_n$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_k = a_{1k}v_1 + \cdots + a_{nk}v_n$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_n = a_{1n}v_1 + \cdots + a_{nn}v_n$$

ولكل $1 \leq k \leq n$.

ليكن $x'_k = a'_{1k}v_1 + \cdots + a'_{nk}v_n$ حيث $a_{ij}, a'_{ij} \in K$ فأن :

$$det(x_1, \dots, x_k + x'_k, \dots, x_n) =$$

$$= det(a_{11}v_1 + \dots + a_{n1}v_n, \dots, (a_{1k} + a'_{1k})v_1 + \dots + (a_{nk} + a'_{nk})v_n, \dots, a_{1n}v_1 + \dots + a_{nn}v_n)$$

$$= det \begin{pmatrix} a_{11} \cdots a_{1k} + a'_{1k} \cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} \cdots a_{nk} + a'_{nk} \cdots a_{nn} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{k+i}(a_{ik} + a'_{ik}) det(A_{ik})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{k+i} a_{ik} \, det(A_{ik}) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{k+i} a'_{ik} \, det(A_{ik})$$

$$= det(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n) + det(x_1, \dots, x'_k, \dots, x_n)$$

بنفس الطريقة نبرهن أنه لكل $\lambda \in K$ ، فأن :

$$det(x_1, \dots, \lambda x_k, \dots, x_n) = \lambda \, det(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n)$$

فأنه من هنا نستنتج ان $det(x_1, \dots, x_n)$ هو شكل متعدد الخطية من الدرجة n على V .

نبرهن على التناوب بالتراجع بالنسبة للعدد n .

ليكن $n = 2$ ، ولتكن $\{v_1, v_2\}$ اساساً للفضاء الشعاعي V على الحقل K ، وليكن f شكل مزدوج الخطية على V فأن :

$$x_1 = a_{11}v_1 + a_{21}v_2$$

$$x_2 = a_{12}v_1 + a_{22}v_2$$

حيث $a_{ij} \in K$.

وإذا كان $x_1 = x_2$ فأن :

$$det(x_1, x_2) = det(a_{11}v_1 + a_{21}v_2 , a_{11}v_1 + a_{21}v_2) = a_{11}a_{21} - a_{21}a_{11} = 0$$

فأن : $det(x_1, x_2)$ متناوب .

لنفرض ان الفرضية صحيحة من اجل $n-1$. وليكن V فضاءاً شعاعياً ذا بعد n على الحقل K ، ولتكن $\{v_1,\dots,v_n\}$ اساساً في V ، وليكن f شكلاً متعدد الخطية من الدرجة n على V . لكل $x_1,\dots,x_n \in V$ ، وإذا كان $x_m = x_l$ حيث $1 \leq m < l \leq n$ فأن :

$$det(x_1,\dots,x_m,\dots,x_l,\dots,x_n) = det\begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1m} \dots a_{1l} \dots a_{1n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} \dots a_{nm} \dots a_{nl} \dots a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1}\, det(A_{i1})$$

لكن المصفوفة A_{i1} هي من الدرجة $n-1$ ، وحسب الفرضية فأن : $det(A_{i1}) = 0$ وبذلك فأن :

$det(x_1,\dots,x_k,\dots,x_l,\dots,x_n) = 0$ كلما تساوى أثنان من الأشعة $x_1,\dots,x_n$. فأن التطبيق det هو شكل متعدد الخطية ومتناوب من الدرجة n على V .

(و.هـ.م.)

(7 . 2) من خواص الاشكال المتعدد الخطية والمتناوب

وبما ان det هو شكل متعدد الخطية ومتناوب كما برهننا في النظرية السابقة فأن :

3.9.3 نتيجة

(١) نضرب محدد المصفوفة A بالعدد (١-) كلما اجرى تبديل بين اماكن اي اثنين من اعمدة المصفوفة A .

(٢) لا تتغير قيمة محدد المصفوفة A ، اذا أضيف الى اي عمود من اعمدة المصفوفة A اي مزج خطي لبقية الاعمدة .

4.9.3 نظرية

ليكن K حقلاً ، ولتكن $A, B \in M_n(K)$ فأن :

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

البرهان :

لتكن $C = \begin{pmatrix} A & \theta \\ -I_n & B \end{pmatrix}$. فأن $C \in M_{2n}(K)$. حسب (7.8.3)

فأن : $\det(C) = \det(A) \cdot \det(B)$

لنضيف الآن الى العمود $n+i$ من المصفوفة C لكل $i = 1, \ldots, n$ المزج الخطي التالي :

$$b_{1i} c_1 + b_{2i} c_2 + \cdots + b_{ni} c_n$$

حيث $c_1, \ldots, c_n$ هي الاعمدة $1, 2, \ldots, n$ من المصفوفة C . ولنرمز للمصفوفة الناتجة بالرمز C' ، فأن :

$$C' = \begin{pmatrix} A & AB \\ -I_n & \theta \end{pmatrix}$$

حسب (8.8.3) فأن : $\det(C') = (-1)^{n^2} \det(-I_n) \det(AB)$

$$= (-1)^{n^2+n} \det(AB) = \det(AB)$$

حسب (3.9.3) فأن :
$$\det(C) = \det(C')$$

وبذلك فأن :
$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$$

(و.هـ.م.)

5.9.3 نظرية

ليكن V فضاءاً شعاعياً ذا بعد n على الحقل K،
ولتكن $A = \{v_1, \ldots, v_n\}$ ، $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ أساسين في V
فأنه لكل $x_1, \ldots, x_n \in V$ ، فأن :

$$\det_A(x_1, \ldots, x_n) = \det_B(x_1, \ldots, x_n) \det_A(u_1, \ldots, u_n)$$

البرهان :

ليكن f شكلاً متعدد الخطية ومتناوباً من الدرجة n
على V ، فأن :

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \det_A(x_1, \ldots, x_n) f(v_1, \ldots, v_n)$$

وكذلك :

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \det_B(x_1, \ldots, x_n) f(u_1, \ldots, u_n)$$

و

$$f(u_1, \ldots, u_n) = \det_A(u_1, \ldots, u_n) f(v_1, \ldots, v_n)$$

من هنا ينتج أن :

$$\det_A(x_1, \ldots, x_n) f(v_1, \ldots, v_n) = \det_B(x_1, \ldots, x_n) \det_A(u_1, \ldots, u_n) f(v_1, \ldots, v_n)$$

واذا كان $f \neq f_0$ فأن : $f(v_1, \ldots, v_n) \neq 0$ ، ومنه فأن

$$\det_A(x_1,\dots,x_n) = \det_B(x_1,\dots,x_n)\,\det_A(u_1,\dots,u_n)$$

(و . هـ . م .)

6.9.3 نظرية

ليكن V فضاء شعاعياً على الحقل K ذا بعد n ولتكن $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ اساساً في V ، ولتكن $x_1,\dots,x_n$ أشعة من V فأن :

$$\det_B(x_1,\dots,x_n)=0 \Longleftrightarrow \text{مرتبطة خطياً } x_1,\dots,x_n$$

البرهان :

إذا كانت الاشعة $x_1,\dots,x_n$ مرتبطة خطياً ، فأنه توجد $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in K$ ليست كلها معدومة . بحيث :

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0$$

ولنفرض ان $\lambda_i \neq 0$ $(1 \le i \le n)$ فأن :

$$x_i = \frac{-\lambda_1}{\lambda_i}x_1 + \dots + \frac{-\lambda_{i-1}}{\lambda_i}x_{i-1} + \frac{-\lambda_{i+1}}{\lambda_i}x_{i+1} + \dots + \frac{-\lambda_n}{\lambda_i}x_n$$

$$x_i = \beta_1 x_1 + \dots + \beta_{i-1}x_{i-1} + \beta_{i+1}x_{i+1} + \dots + \beta_n x_n$$

حيث $\beta_j = \dfrac{-\lambda_j}{\lambda_i}$

فأن :

$$\det_B(x_1,\dots,x_i,\dots,x_n) = \det_B(x_1,\dots,\beta_1 x_1+\dots+\beta_{i-1}x_{i-1}+\beta_{i+1}x_{i+1}+\dots+\beta_n x_n,\dots,x_n)$$

$$=\beta_1 det_B(x_1,\dots,x_1,\dots,x_n)+\dots+\beta_n\, det_B(x_1,\dots,x_n,\dots,x_n)$$
$$=\beta_1 \cdot 0+\dots+\beta_n \cdot 0=0$$

لنفرض الآن أن : $det_B(x_1,\dots,x_n)=0$. إذا كانت الأشعة $x_1,\dots,x_n$ مستقلة خطياً فأن $A=\{x_1,\dots,x_n\}$ تكون أساساً للفضاء V لأن عدد الأشعة في A هو n.
حسب (5.9.3) فأن :

$$det_A(x_1,\dots,x_n)=det_B(x_1,\dots,x_n)\, det_A(v_1,\dots,v_n)$$

لكن $det_B(x_1,\dots,x_n)=0$ حسب الفرض.
ولكن $det_A(x_1,\dots,x_n)=1$. وهذا تناقض، من هذا نستنتج أن الأشعة $x_1,\dots,x_n$ مرتبطة خطياً .

(و. هـ. م.)

3 . 10 إيجاد مقلوب المصفوفة

3 . 10 . 1 نظرية

ليكن K حقلاً ، ولتكن $A\in M_n(K)$ فأن :

$$A \text{ عكوس } \Leftrightarrow det(A)\neq 0$$

البرهان :

حسب (5.5.3) فأن A عكوس $\Leftrightarrow$ أشعة أعمدة المصفوفة A مستقلة خطياً . وكذلك حسب (6.9.3) فأن أشعة أعمدة المصفوفة A مستقلة خطياً $\Leftrightarrow det(A)\neq 0$
فأن المصفوفة A عكوس $\Leftrightarrow det(A)\neq 0$.

(و. هـ. م.)

2.10.3 تعريف

ليكن K حقلاً ولتكن $A \in M_n(K)$ بحيث $det(A) \neq 0$
نعرف مقلوب المصفوفة A والتي رمزنا له ب A^{-1} كمايلي:

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \cdot (B)^T$$

حيث:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$ وأن $b_{ij} = (-1)^{i+j} det(A_{ij})$

لكل $i, j = 1, \ldots, n$. وتسمى B^T احياناً بالمرافق التقليدي للمصفوفة A ويرمز لها بالرمز $adj(A)$.

3.10.3 نظرية

ليكن K حقلاً ، ولتكن $A \in M_n(K)$ مصفوفة عكوسة فأن : $det(A^{-1}) = (det(A))^{-1}$

البرهان:

بما ان A عكوس فأن $det(A) \neq 0$ ، فأن :

$$\begin{aligned} det(A^{-1}) &= det(A^{-1})\left(det(A) \cdot (det(A))^{-1} \right) \\ &= \left(det(A^{-1}) \cdot det(A)\right) \cdot (det(A))^{-1} \\ &= det(A^{-1}A) \cdot (det(A))^{-1} \\ &= det(I_n)(det(A))^{-1} = 1 \cdot (det(A))^{-1} = (det(A))^{-1} \end{aligned}$$

(و.هـ.م.)

4.10.3 نظرية

ليكن V فضاءً شعاعياً على الحقل K ، ولتكن $C=\{v_1,\dots,v_n\}$ ، $D=\{u_1,\dots,u_n\}$ اساسين في V ، وليكن f تطبيقاً خطياً من V في V . ولتكن A المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي f في الأساس C ، ولتكن B المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي f في الأساس D فأن $\det(A)=\det(B)$.

البرهان :

لتكن P هي مصفوفة العبور من الاساس C الى الأساس D ، فأنه حسب (3.7.3 فرع (5)) فأن:

$$B=P^{-1}AP$$

فأن :

$$\det(B)=\det(P^{-1}AP)=\det(P^{-1})\det(A).\det(P)$$
$$=\det(A)$$

(و.هـ.م.)

نلاحظ من هذه النظرية ان محدد المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي لا يعتمد على أختيار الأساس .

5.10.3 تعريف

ليكن V فضاءً شعاعياً ذا بعد منتهي على الحقل

K، وليكن f تطبيقاً خطياً من V في V . نسمي محدد المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي f في اي اساس للفضاء الشعاعي V بمحدد التطبيق الخطي f ونرمز له بالرمز $det(f)$.

6.10.3 نظرية

ليكن V فضاءً شعاعياً ذا بعد منتهي على الحقل K . لكل تطبيقين خطيين f ، g من V في V فأن :

(1) $det(Id_V) = 1$

(2) $det(f \circ g) = det(f) . det(g)$

(3) f تقابل $\Leftrightarrow det(f) \neq 0$

(4) واذا كان f تقابلاً فأن : $det(f^{-1}) = (det(f))^{-1}$

البرهان :

(1) بما ان المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي Id_V هي I_n ، فأنه حسب (5.8.3) $det(I_n) = 1$.
وحسب (5.10.3) ينتج ان $det(Id_V) = 1$.

(2) لتكن A المصفوفة المرافقة لـ f ، B المصفوفة المرافقة لـ g فأنه حسب (4.9.3) ، $det(A.B) = det(A).det(B)$. حسب (5.10.3) فأن :

$det(f \circ g) = det(f) . det(g)$

(3) لتكن A المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي f ، فأنه حسب النظرية (3 . 10 . 1) A عكوس $\Leftrightarrow$ $det(A) \neq 0$. لكن حسب النظرية (3 . 5 . 5) فأن A عكوس $\Leftrightarrow$ f تقابل ، فأن f تقابل $\Leftrightarrow$ $det(A) \neq 0$ أي ان f تقابل $\Leftrightarrow$ $det(f) \neq 0$.

(4) لتكن A المصفوفة المرافقة لـ f . بما ان f تقابل فأن A عكوس ، فأن f^{-1} هو التطبيق الخطي المرافق للمصفوفة A^{-1} . حسب النظرية (3 . 10 . 3) فأن

$$det(A^{-1}) = (det(A))^{-1}$$

فأنه حسب (3 . 10 . 5)

$$det(f^{-1}) = (det(f))^{-1}$$

(و . هـ . م .)

- تمارين -

(1) لتكن $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 3 & 5 & -4\end{pmatrix}$ ، $B=\begin{pmatrix}6 & 1 & -7\\ 4 & 5 & 2\end{pmatrix}$ ،

$$C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -3 & 1 & 4\\ -2 & 6 & 9\end{pmatrix}$$

أوجد :

(a) $2A+B$ ،

(b) AC .

(c) $3A^T - 2B^T$.

(d) هل CA ، AB معرفتين .

(e) أوجد $Tr(C)$.

(2) ليكن $\mathbb{C}$ فضاءاً شعاعياً على الحقل $\mathbb{R}$ ،
$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ تطبيقاً خطياً معرفاً كالآتي :
$\forall\ z \in \mathbb{C}\ ;\ f(z) = \bar{z}$.
اوجد المصفوفة المرافقة للتطبيق f بالنسبة لكل
من الاساس (a $\{1, i\}$ ، (b $\{(1+i), (1+2i)\}$

(3) في $M_2(\mathbb{R})$ لتكن :

$$F_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & c\\ 0 & 0\end{pmatrix} ;\quad a, c \in \mathbb{R} \right\}$$

و

$$F_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0\\ b & d\end{pmatrix} ;\quad b, d \in \mathbb{R} \right\}$$

(a) برهن ان F_1 ، F_2 هما فضاءان شعاعيين جزئيين من الفضاء الشعاعي $M_2(\mathbb{R})$.

(b) اوجد $F_1 \cap F_2$ ، $F_1 + F_2$.

(c) هل أن $M_2(\mathbb{R}) = F_1 \oplus F_2$ ؟ .

(d) أوجد أساس لكل من F_1 ، F_2 . ثم استنتج أساساً للفضاء $M_2(\mathbb{R})$.

(4) ليكن $\mathbb{R}^2$ فضاءاً شعاعياً على الحقل $\mathbb{R}$. ولتكن

$$A = \{ v_1 = (1,2) \ , \ v_2 = (2,1) \}$$

و $$B = \{ u_1 = (1,3) \ , \ u_2 = (3,1) \}$$

أساسين في الفضاء $\mathbb{R}^2$. وليكن $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ تطبيقاً خطياً معرفاً كالآتي :

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ ; f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2 \ , \ x_1 - x_2)$$

اوجد المصفوفة المرافقة للتطبيق f .

(5) لتكن $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي f . ولتكن $A = \{ e_1 = (1,0) ، e_2 = (1,1) \}$ أساساً في الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^2$ على الحقل $\mathbb{R}$ ، ولتكن $B = \{ f_1 = (1,1,0) \ , \ f_2 = (2,1,1) \ , \ f_3 = (0,0,1) \}$ أساساً في الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^3$ على الحقل $\mathbb{R}$.

(a) أوجد التطبيق f .

(b) اوجد المصفوفة المرافقة للتطبيق f

وإذا كانت: $A' = \{ e'_1 = (0,1) \ , e'_2 = (2,1) \}$ ، أساساً في $\mathbb{R}^2$
و $B' = \{ f'_1 = (1,0,0) \ , f'_2 = (0,1,0) \ , f'_3 = (0,0,1) \}$ أساساً في $\mathbb{R}^3$.

(6) ليكن $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ تطبيقاً خطياً معرفاً كالآتي:

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ f(x,y,z) = (3x + 2y - 4z \ , \ x - 5y + 3z)$$

ولتكن $A = \{ v_1 = (1,3) \ , v_2 = (2,5) \}$ اساساً في $\mathbb{R}^2$،
$B = \{ u_1 = (1,1,1) \ , u_2 = (1,1,0) \ , u_3 = (1,0,0) \}$ اساساً في $\mathbb{R}^3$.
أوجد المصفوفة المرافقة للتطبيق f.

(7) a) اثبت أنه لكل $A, B \in M_{m,n}(K)$ ولكل $\lambda \in K$.

$$(A + B)^T = A^T + B^T \qquad (1)$$

$$(A.B)^T = B^T . A^T \qquad (2)$$

$$(\lambda A)^T = \lambda . A^T \qquad (3)$$

b) اثبت انه لكل $A, B \in M_n(K)$ ولكل $\lambda \in K$.

$$Tr(A + B) = Tr(A) + Tr(B) \qquad (1)$$

$$Tr(\lambda A) = \lambda Tr(A) \qquad (2)$$

(8) أوجد مرتبة المصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & -1 \\ 4 & 3 & -7 & -2 \end{pmatrix}$$

(9) لتكن $A = \{ e_1 = (0,0,-1) \ , \ e_2 = (0,-1,0) \ , \ e_3 = (1,-1,0)\}$

و $B = \{ f_1 = (2,0,1) \ , \ f_2 = (0,1,1) \ , \ f_3 = (1,1,-1)\}$

أساسين في الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^3$ على الحقل $\mathbb{R}$.

(a) اوجد مصفوفة العبور P من الاساس A الى الأساس B .

(b) هل ان P عكوس ؟ .

(c) أوجد P^T .

(10) ليكن V فضاءاً شعاعياً على الحقل K بعده 3،

لتكن $A = \{ a_1, a_2, a_3\}$ ، $B = \{a'_1 = a_1 , a'_2 = a_1 + a_2 , a'_3 = a_1 + a_2 + a_3\}$

اساسين في الفضاء V .

(a) اوجد مصفوفة العبور P من الاساس A الاساس B .

(b) هل ان P عكوس ؟ .

(11) ليكن V فضاءاً شعاعياً على الحقل K بعده 2 ،

ولتكن $\{e_1, e_2\}$ اساساً في V ، وليكن $f, g : V \to V$

تطبيقين خطيين معرفين كالآتي :

$f(e_1) = 5e_1 + e_2$ ، $f(e_2) = e_1 + e_2$ ، $g(e_1) = 2e_1 - e_2$ ،

$g(e_2) = 3e_1 + 2e_2$.

(a) اوجد المصفوفة المرافقة لكل من f ،

g ، $f \circ g$ ، $g \circ f$.

(ب) إذا كانت A مصفوفة مرافقة للتطبيق الخطي f ، B مصفوفة مرافقة للتطبيق الخطي g ، C مصفوفة مرافقة للتطبيق الخطي $g \circ f$ ، D مصفوفة مرافقة للتطبيق الخطي $g \circ f$ ، اوجد C ، $\mathcal{D}$ بدلالة A ، B .

(12) لتكن $A=\begin{pmatrix} 0 & -4 & 9 \\ 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}$. إذا كانت E اساساً نظامياً في $\mathbb{R}^2$ ، F اساساً نظامياً في $\mathbb{R}^3$ ، اوجد التطبيق الخطي f المرافق للمصفوفة A .
إذا كانت $F' = \{(0,0,3), (0,2,0), (1,0,0)\}$ اساساً آخر في $\mathbb{R}^3$ ، اوجد مصفوفة العبور H من الأساس F' الى الاساس F .

(13) اوجد المصفوفة العكوسة لكل من :

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(14) احسب :

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & n \end{pmatrix} \quad , \quad \det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -7 \\ 1 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(15) لتكن :

$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ ، $B=\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix}$ ، أحسب $\det(A.B)$.

(16) لتكن $A\in M_n(K)$ ، برهن أن : $A(\operatorname{adj}A)=\det(A).I_n$

(17) أثبت أن :

(a)
$$\det\begin{pmatrix}a^2 & ab & b^2\\ a^2+2 & ab+1 & b^2\\ a^2-1 & ab & b^2+1\end{pmatrix}=(a-b)^2$$

(b)
$$\det\begin{pmatrix}a & a & b+c\\ a+c & b & b\\ c & a+b & c\end{pmatrix}=4abc$$

(c)
$$\det\begin{pmatrix}a-b-c & 2a & 2a\\ 2b & b-c-a & 2b\\ 2c & 2c & c-a-b\end{pmatrix}=(a+b+c)^3$$

(18) ليكن V فضاء أشعاعياً على الحقل K لبعده 3 ، ولتكن $B=\{b_1,b_2,b_3\}$ اساساً في V . برهن انه لاذا تساوى شعاعان من الاشعة x_1,x_2,x_3 في V فأن : $\det_B(x_1,x_2,x_3)=0$

الفصل الرابع
الفضاء الأقليدي والهيرميتي

1.4 الأشكال التربيعية

1.1.4 تعريف

ليكن V فضاءً شعاعياً على الحقل K، وليكن f شكلاً مزدوج الخطية على V. نقول ان f هو شكل متماثل اذا كان لكل $x, y \in V$: $f(x,y) = f(y,x)$.

2.1.4 تعريف

ليكن V فضاءً شعاعياً على الحقل K ذا بعد n. ولتكن $\{v_1, \dots, v_n\}$ اساساً في V ، وليكن f شكلاً مزدوج الخطية على V ، فأنه لكل $u, v \in V$:

$u = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ ، $v = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n$ حيث

$\alpha_i , \beta_i \in K$. فأن :

$$\begin{aligned} f(v,u) &= f(\beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n , \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) \\ &= \beta_1 \alpha_1 f(v_1, v_1) + \beta_1 \alpha_2 f(v_1, v_2) + \dots + \beta_1 \alpha_n f(v_1, v_n) + \\ &+ \beta_2 \alpha_1 f(v_2, v_1) + \beta_2 \alpha_2 f(v_2, v_2) + \dots + \beta_2 \alpha_n f(v_2, v_n) + \\ &+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots + \\ &+ \beta_n \alpha_1 f(v_n, v_1) + \beta_n \alpha_2 f(v_n, v_2) + \dots + \beta_n \alpha_n f(v_n, v_n) \end{aligned}$$

اي ان : $f(v,u) = \sum_{i,j=1}^{n} f(v_i , v_j) \beta_i \alpha_j$ حيث $f(v_i , v_j) \in K$

ليكن $f(v_i, v_j) = a_{ij}$ ، فإنه لكل أساس $\{v_1, \dots, v_n\}$ في الفضاء الشعاعي V ، كل شكل مزدوج الخطية يكتب بالشكل :

$$f(v, u) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \beta_i \alpha_j \quad ,$$

حيث β_i هي مركبات الشعاع v ، α_j هي مركبات الشعاع u في الأساس $\{v_1, \dots, v_n\}$ ، والحدود السلمية $a_{ij} = f(v_i, v_j)$ يعتمد على اختيار الأساس .

المصفوفة $A = (a_{ij})$ تسمى المصفوفة المرافقة للشكل مزدوج الخطية f في الأساس $\{v_1, \dots, v_n\}$.

لنرى الآن ماذا يحدث عند تغيير الأساس . ليكن $\{u_1, \dots, u_n\}$ أساساً آخراً في الفضاء V . فإن :

$$u_1 = c_{11} v_1 + c_{21} v_2 + \dots + c_{n1} v_n$$

$$u_2 = c_{12} v_1 + c_{22} v_2 + \dots + c_{n2} v_2$$

$$- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -$$

$$u_n = c_{1n} v_1 + c_{2n} v_2 + \dots + c_{nn} v_n$$

حيث $c_{ij} \in K$. فإن مصفوفة العبور من الأساس $\{v_1, \dots, v_n\}$ الى الأساس $\{u_1, \dots, u_n\}$ هي :

$$C = (c_{ij}) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

ولتكن $A = (a_{ij})$ المصفوفة المرافقة للشكل مزدوج

الخطية f في الأساس $\{v_1, \dots, v_n\}$. نبحث عن المصفوفة $B=(b_{ij})$ الموافقة للشكل f في الأساس $\{u_1, \dots, u_n\}$. لكل $1 \leq p \leq i$ و $j \leq q \leq 1$ فأن :

$$b_{pq} = f(u_p, u_q) = f(c_{1p}v_1 + c_{2p}v_2 + \dots + c_{np}v_n , c_{1q}v_1 + c_{2q}v_2 + \dots + c_{nq}v_n)$$
$$= \sum_{i,j=1}^{n} f(v_i, v_j)\, c_{ip}\, c_{jq}$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, c_{ip}\, c_{jq}$$

من هنا فأن :

$$b_{pq} = \sum_{i,j=1}^{n} c'_{pi}\, a_{ij}\, c_{jq}$$

حيث $c'_{pi} = c_{ip}$ هي عناصر المصفوفة C^T والتي هي منقول المصفوفة C اي ان : $B = C^T A C$.

3.1.4 مثال .

لنأخذ الأساس النظامي $\{e_1, e_2, e_3\}$ في الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^3$ على الحقل $\mathbb{R}$. وليكن $f: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ شكلاً معرفاً كالآتي :

$$\forall\, x = (x_1, x_2, x_3) \;,\; y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 ,$$
$$f(x, y) = x_1 y_1 - 4 x_2 y_3 + 6 x_1 y_2$$

حيث x_i هي مركبات الشعاع x ، y_i هي مركبات الشعاع y في الاساس النظامي .

لنبرهن ان f شكل مزدوج الخطية . لكل $x' = (x'_1, x'_2, x'_3) \in \mathbb{R}^3$ فأن :

فأن :

$$f(x+x',y)=f((x_1+x'_1\,,\,x_2+x'_2\,,\,x_3+x'_3),(y_1,y_2,y_3))$$
$$=(x_1+x'_1)y_1-4(x_2+x'_2)y_3+6(x_1+x'_1)y_2$$
$$=(x_1y_1-4x_2y_3+6x_1y_2)+(x'_1y_1-4x'_2y_3+6x'_1y_2)$$
$$=f(x,y)+f(x',y)$$

ولكل $\lambda\in\mathbb{R}$ فأن :

$$f(\lambda x,y)=f((\lambda x_1,\lambda x_2,\lambda x_3),(y_1,y_2,y_3))$$
$$=\lambda x_1y_1-4\lambda x_2y_3+6\lambda x_1y_2$$
$$=\lambda f(x,y)$$

وبنفس الطريقة نبرهن انه لكل $y'\in\mathbb{R}^3$ فأن :

$$f(x,y+y')=f(x,y)+f(x,y')$$
$$،f(x,\lambda y)=\lambda f(x,y)$$

بذلك فأن f شكل مزدوج الخطية على $\mathbb{R}^3$.

نجد الآن المصفوفة المرافقة للشكل f .

حيث $\{e_1=(1,0,0)\,,\,e_2=(0,1,0)\,,\,e_3=(0,0,1)\}$ عبارة عن الاساس النظامي في $\mathbb{R}^3$ ، فأن :

$$a_{11}=f(e_1,e_1)=1\;,\;a_{12}=f(e_1,e_2)=6\;,\;a_{13}=f(e_1,e_3)=0$$
$$a_{21}=f(e_2,e_1)=0\;,\;a_{22}=f(e_2,e_2)=0\;,\;a_{23}=f(e_2,e_3)=-4$$
$$a_{31}=f(e_3,e_1)=0\;,\;a_{32}=f(e_3,e_2)=0\;,\;a_{33}=f(e_3,e_3)=0$$

فأن المصفوفة المرافقة للشكل f هي :

$$A=\begin{pmatrix}1&6&0\\0&0&-4\\0&0&0\end{pmatrix}$$

لتكن $\{u_1=(1,1,-1)\ ,\ u_2=(0,1,2)\ ,\ u_3=(0,0,1)\}$ اساساً اخراً في V . فأن :

$$u_1 = 1.e_1 + 1.e_2 + (-1)e_3$$

$$u_2 = 0.e_1 + 1.e_2 + 2.e_3$$

$$u_3 = 0.e_1 + 0.e_2 + 1.e_3$$

فأن : $c_{11} = 1\ ,\ c_{21} = 1\ ,\ c_{31} = -1$

$c_{12} = 0\ ,\ c_{22} = 1\ ,\ c_{32} = 2$

$c_{13} = 0\ ,\ c_{23} = 0\ ,\ c_{33} = 1$

فأن مصفوفة العبور C من الاساس $\{e_1, e_2, e_3\}$ الى الاساس $\{u_1, u_2, u_3\}$ هي :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

فأن :

$$C^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

من هنا فأن المصفوفة B الموافقة للشكل الخطي f في الأساس $\{u_1, u_2, u_3\}$ هي :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 14 & 4 \\ 4 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4.1.4 تعريف

ليكن V فضاءاً شعاعياً على الحقل K ، وليكن f شكلاً مزدوج الخطية ومتماثلاً على V . التطبيق $\varphi : V \to K$ نسميه شكلاً تربيعياً مرتبطاً بالشكل المزدوج الخطية والمتماثل f إذا كان لكل $v \in V$ ، $\varphi(v) = f(v,v)$ ، ونقول عن f انه الشكل القطبي المرتبط بالشكل التربيعي φ .

المصفوفة المرافقة للشكل التربيعي φ هي المصفوفة المرافقة للشكل القطبي f .

نقول ان الشكل التربيعي φ محددة موجبة إذا كان لكل

$$v \in V \ , \quad \varphi(v) \geqslant 0 \quad و \quad \varphi(v) = 0 \iff v = 0$$

نلاحظ انه لكل $x, y \in V$ فأن :

$$f(x+y\ ,\ x+y) = f(x,x) + f(x,y) + f(y,x) + f(y,y)$$

فأن :

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\left(f(x+y\ ,x+y) - f(x,x) - f(y,y)\right)$$

ومنه

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x+y) - \varphi(x) - \varphi(y)\right)$$

اي ان الشكل المزدوج الخطية والمتماثل f يعين بواسطة شكله التربيعي المرافق له . وتسمى هذه الكتابة الأخيرة بالكتابة القطبية للشكل f .

نلاحظ كذلك انه لكل $v \in V$ ولكل $\lambda \in K$ فأن :

$$\varphi(\lambda v) = f(\lambda v, \lambda v) = \lambda^2 f(v,v) = \lambda^2 \varphi(v)$$

5.1.4 نظرية

المصفوفة المرافقة للشكل التربيعي هي مصفوفة متماثلة .

البرهان :

ليكن V فضاءً شعاعياً ذا بعد n على الحقل IK ، وليكن f شكلاً مزدوج الخطية ومتماثل على V . وليكن φ شكلاً تربيعياً مرتبطاً بالشكل المزدوج الخطية والمتماثل f. ولتكن $\{v_1, \dots, v_n\}$ اساساً في V ، فأنه لكل $x \in V$

$x = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ فأن :

$$\varphi(x) = f(x,x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \lambda_i \lambda_j = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}^T A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

حيث λ_i هي مركبات الشعاع x في الاساس $\{v_1, \dots, v_n\}$ ، $A = (a_{ij})$ هي المصفوفة المرافقة للشكل التربيعي φ. نلاحظ هنا انه لكل $1 \leq i,j \leq n$ ، بما ان f متماثل فأن :

$$a_{ij} = f(v_i, v_j) = f(v_j, v_i) = a_{ji}$$

لذلك فأن المصفوفة A المرافقة للشكل التربيعي φ هي متماثلة .

(و . هـ . م .)

6.1.4 مثال

التطبيق $\varphi : IR^2 \to IR$ المعرف بالشكل التالي :

$$\forall x = (x_1, x_2) \in IR^2 ; \ \varphi(x) = \varphi(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 3x_1 x_2 + x_2^2$$

هو شكل تربيعي على الفضاء الشعاعي IR^2 على الحقل IR .

لكل $y=(y_1,y_2)\in IR^2$ فأن الشكل المزدوج الخطية والمتماثل المرتبط بالشكل φ هي :

$$f(x,y)=\frac{1}{2}\left(\varphi(x+y)-\varphi(x)-\varphi(y)\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\varphi(x_1+y_1,x_2+y_2)-\varphi(x_1,x_2)-\varphi(y_1,y_2)\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[2(x_1+y_1)^2-3(x_1+y_1)(x_2+y_2)+(x_2+y_2)^2-2x_1^2+3x_1x_2-x_2^2-\right.$$
$$\left.-2y_1^2+3y_1y_2-y_2^2\right]$$

$$f(x,y)=2x_1y_1-\frac{3}{2}x_1y_2-\frac{3}{2}x_2y_1+x_2y_2$$

فأن f شكل مزدوج الخطية ومتماثل.

وكذلك لكل $x=(x_1,x_2)\in IR^2$ فأن : $\varphi(x)=f(x,x)$

لنأخذ الاساس النظامي $\{e_1=(1,0),e_2=(0,1)\}$ في IR^2 ، ولنوجد المصفوفة المرافقة للشكل التربيعي φ . اي انتا لنوجد المصفوفة المرافقة للشكل المزدوج الخطية والمتماثل f في الاساس النظامي في IR^2 .

$$a_{11}=f(e_1,e_1)=2\quad,\quad a_{12}=f(e_1,e_2)=-\frac{3}{2}$$

$$a_{21}=f(e_2,e_1)=\frac{-3}{2}\quad,\quad a_{22}=f(e_2,e_2)=1$$

فأن المصفوفة A المرافقة للشكل المزدوج الخطية والمتماثل f هي :

$$A=\begin{pmatrix}2 & -\frac{3}{2}\\ -\frac{3}{2} & 1\end{pmatrix}$$

وهي المصفوفة المرافقة للشكل التربيعي φ ، ونلاحظ ان المصفوفة A متماثلة .

7.1.4 تعريف

ليكن V فضاءً شعاعياً بعده n على الحقل K.
وليكن f شكلاً مزدوج الخطية ومتماثل على V، وليكن
$\varphi : V \to K$ شكلاً تربيعياً مرتبطاً بالشكل f.
لتكن $\{v_1, \dots, v_n\}$ اساساً في V، ولتكن $A = (a_{ij})$
المصفوفة المرافقة للشكل f، فأنه لكل $x \in V$:
$\varphi(x) = f(x, x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ حيث $x_1, \dots, x_n$ هي
مركبات الشعاع x في الاساس $\{v_1, \dots, v_n\}$.
فأذا وجد أساس $\{v'_1, \dots, v'_n\}$ في V بحيث ان:

$$\varphi(x) = a'_{11} x'^2_1 + \dots + a'_{nn} x'^2_n$$

حيث x'_i هي مركبات الشعاع x في الاساس $\{v'_1, \dots, v'_n\}$
و $a'_{ii} \in K$، عندئذ نقول ان للشكل التربيعي φ الصيغة
القانونية (أو القطرية) في الاساس $\{v'_1, \dots, v'_n\}$.

8.1.4 تحويل الشكل التربيعي الى الصيغة القانونية (القطرية)

ليكن V فضاءً شعاعياً ذا بعد n على الحقل
K، ولتكن $\{v_1, \dots, v_n\}$ اساساً في V، وليكن
f شكلاً مزدوج الخطية ومتماثلاً على V و $\varphi : V \to K$
شكلاً تربيعياً مرتبطاً بالشكل f. لتكن $A = (a_{ij})$
المصفوفة المرافقة للشكل f، فأنه لكل $x \in V$:

$$\varphi(x) = f(x, x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \quad \dots (1)$$

حيث $x_1, \dots, x_n$ هي مركبات الشعاع x في الاساس $\{v_1, \dots, v_n\}$.

(1) طريقـة لاكرانك

سنبحث عن اساس اخر في V بحيث ان (1) يكتب بشكل تحذف فيها كل الحدود التي يكون فيها $i \neq j$.
اذا وجد $1 \leq k \leq n$ بحيث $a_{kk} \neq 0$ ، فأننا نعيد ترقيم العوامل ، ونرمز لهذا العامل بـ a'_{11} . إذا كان لكل $1 \leq k \leq n$
$a_{kk} = 0$ ، فأنه يوجد احد العوامل وليكن $a_{ij} \neq 0$ ($i \neq j$)
والا لكان φ تطبيقاً صفرياً . لنفرض ان $a_{12} \neq 0$ ، بما أن φ هو شكل تربيعي فأن المصفوفة المرافقة له هي مصفوفة متماثلة ، فأن $a_{12} = a_{21}$ ، من هنا فأن $2a_{12}x_1x_2 \neq 0$. عندئذ نضع $x_1 = x'_1 + x'_2$ ، $x_2 = x'_1 - x'_2$
، $x_k = x'_k$ ، لكل $k = 3, \ldots, n$.
فيكون $2a_{12}x_1x_2 = 2a_{12}(x'^2_1 - x'^2_2)$ نجد ان العامل عند x'^2_1 يختلف عن الصفر ، ونعيد الترقيم ونرمز له a'_{11} .
بناءً على ما سبق نرى انه يمكننا ان نفرض ان $a_{11} \neq 0$ (أو بعد الترقيم نفرض ان $a'_{11} \neq 0$) .
في (1) الحدود التي تحتوي على x_1 هي :

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n$$

نكمل هذا الحد الى مربع كامل فيكون لدينا :

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n = \frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n)^2 - B$$

حيث B يحوي على مجموع مربعات وحاصل ضرب العناصر $\{a_{12}x_2, a_{13}x_3, \ldots, a_{1n}x_n\}$.
بالتعويض في (1) ينتج أن :

$$\varphi(x) = f(x,x) = \frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n)^2 + \dots$$

حيث الحدود الغير مكتوبة هي بدلالة $x_2, \dots, x_n$.

نفرض الآن أن :

$$y_1 = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n$$

$$y_2 = x_2$$

$$\dots\dots$$

$$y_n = x_n$$

وبذلك فأن :

$$\varphi(x) = f(x,x) = \frac{1}{a_{11}} y_1^2 + \sum_{i,j=2}^{n} b_{ij} y_i y_j$$

نلاحظ ان المقدار $\sum_{i,j=2}^{n} b_{ij} y_i y_j$ مشابهة الى المقدار (1) عدا ان المجموع يبدأ من 2 .

بنفس الطريقة نفرض ان $b_{22} \neq 0$ ونعيد نفس العملية فيكون :

$$z_1 = y_1$$

$$z_2 = b_{22}y_2 + b_{23}y_3 + \dots + b_{2n}y_n$$

$$z_3 = y_3$$

$$\dots\dots$$

$$z_n = y_n$$

فأن :

$$\varphi(x) = f(x,x) = \frac{1}{a_{11}} z_1^2 + \frac{1}{b_{22}} z_2^2 + \sum_{i,j=3}^{n} c_{ij} z_i z_j$$

وهكذا نعيد العملية هذه ونحصل على :

$$\varphi(x) = f(x,x) = \lambda_{11} d_1^2 + \lambda_{22} d_2^2 + \dots + \lambda_{nn} d_n^2$$

حيث $\lambda_{ii} \in K$ ، $d_1, \dots, d_n$ هي مركبات الشعاع x
في اساس اخر جديد $\{u_1, \dots, u_n\}$ في V .
لايجاد هذا الاساس الجديد نكتب كل من $x_1, \dots, x_n$
بدلالة $d_1, \dots, d_n$ ، ثم باستعمال (3.7.3 مزع (2))
نوجد مصفوفة العبور من الاساس $\{v_1, \dots, v_n\}$ الى
الأساس الجديد $\{u_1, \dots, u_n\}$ ، بما ان $\{v_1, \dots, v_n\}$ معروف
فأننا نوجد الاساس $\{u_1, \dots, u_n\}$.

(2) <u>طريقة جاكوبي (سنقتصر على ذكر هذه الطريقة فقط)</u>

إذا كان كل المحددات $\Delta_1 = a_{11}$ ، $\Delta_2 = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \dots$

$$\dots\dots \quad \Delta_n = \det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ يختلف عن الصفر .

فأنه يوجد الاساس $\{u_1, \dots, u_n\}$ في V بحيث ان الشكل
التربيعي φ يأخذ الشكل

$$\varphi(x) = f(x,x) = \frac{1}{\Delta_1} y_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} y_2^2 + \dots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} y_n^2$$

حيث $y_1, \dots, y_n$ هي مركبات الشعاع x في الاساس
الجديد $\{u_1, \dots, u_n\}$.

<u>4.1.9 مثال</u>

ليكن V فضاءً شعاعياً على الحقل K ذا بعد 3
ولتكن $\{v_1, v_2, v_3\}$ اساساً في V .

وليكن $\varphi(x) = f(x,x) = 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - x_2^2 - 8x_3^2$ شكلاً تربيعياً

على V ، حيث x_1, x_2, x_3 هي مركبات الشعاع x في

الاساس $\{v_1, v_2, v_3\}$. نضع :

$$x_1 = y_2 \quad , \quad x_2 = y_1 \quad , \quad x_3 = y_3$$

فأن :

$$\begin{aligned}\varphi(x) = f(x,x) &= -y_1^2 + 2y_1y_2 + 4y_2y_3 - 8y_3^2 \\ &= -(y_1^2 - 2y_1y_2 + y_2^2) + y_2^2 + 4y_2y_3 - 8y_3^2 \\ &= -(y_1 - y_2)^2 + y_2^2 + 4y_2y_3 - 8y_3^2\end{aligned}$$

نضع :

$$z_1 = (y_1 - y_2) = y_1 - y_2 \quad , \quad z_2 = y_2 \quad , \quad z_3 = y_3$$

فأن :

$$\begin{aligned}\varphi(x) = f(x,x) &= -z_1^2 + z_2^2 + 4z_2z_3 - 8z_3^2 \\ &= -z_1^2 + (z_2 + 2z_3)^2 - 12z_3^2.\end{aligned}$$

نضع :

$$d_1 = z_1 \quad , \quad d_2 = z_2 + 2z_3 \quad , \quad d_3 = z_3$$

فأن :

$$\varphi(x) = f(x,x) = -d_1^2 + d_2^2 - 12d_3^2$$

حيث d_1, d_2, d_3 هي مركبات الشعاع x في الاساس

الجديد $\{u_1, u_2, u_3\}$. لنبحث عن هذا الاساس ، بالتعويض

نحصل على :

$$d_1 = z_1 = -y_1 + y_2 = x_2 - x_1$$

$$d_2 = z_2 + 2z_3 = y_2 + 2y_3 = x_1 + 2x_3$$

$$d_3 = z_3 = y_3 = x_3$$

من هنا فأن :

$$x_1 = \alpha_2 - 2\alpha_3$$
$$x_2 = \alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3$$
$$x_3 = \alpha_3$$

فأن مصفوفة العبور من الاساس $\{v_1, v_2, v_3\}$ الى الاساس $\{u_1, u_2, u_3\}$ هي :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

فأذا عرفنا الاساس $\{v_1, v_2, v_3\}$ فأننا نجد الاساس $\{u_1, u_2, u_3\}$.

2.4 الفضاء الأقليدي

1.2.4 تعريف

ليكن V فضاءاً شعاعياً على الحقل $\mathbb{R}$ ، نقول ان التطبيق $f : V \times V \to \mathbb{R}$ هو حاصل الضرب السلمي على V إذا تحقق مايلي :-

(1) لكل $v_1, v_2 \in V$ ، $f(v_1, v_2) = f(v_2, v_1)$

(2) لكل $v_1, v_2 \in V$ ولكل $\lambda \in \mathbb{R}$ ، $f(\lambda v_1, v_2) = \lambda f(v_1, v_2)$

(3) لكل $v_1, v_2, v_3 \in V$ ، $f(v_1 + v_3, v_2) = f(v_1, v_2) + f(v_3, v_2)$

(4) لكل $v \in V$ ، $f(v, v) > 0$ و $f(v, v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$

ونكتب عادة $v_1 \circ v_2$ بدلاً عن $f(v_1, v_2)$.

نلاحظ من التعريف مباشرة انه لكل $v_1, v_2, v_3 \in V$ فأن :

$$v_1 \circ (v_2 + v_3) = (v_2 + v_3) \circ v_1 = v_2 \circ v_1 + v_3 \circ v_1 = v_1 \circ v_2 + v_1 \circ v_3$$

وكذلك لكل $\lambda \in \mathbb{R}$ فأن :

$$v_1 \circ \lambda v_2 = \lambda v_2 \circ v_1 = \lambda (v_2 \circ v_1) = \lambda (v_1 \circ v_2)$$

من هنا ومن تعريف الضرب السلمي ينتج مباشرة النظرية التالية :-

2.2.4 نظرية

ليكن V فضاءاً شعاعياً على الحقل $\mathbb{R}$ ، فأن $f : V \times V \to \mathbb{R}$ هو ضرب سلمي على V $\Leftrightarrow$ f شكل مزدوج الخطية ومتماثل على V والشكل التربيعي المرافق له محددة موجبة .

3.2.4 مثال

على الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^n$ على الحقل $\mathbb{R}$ لنعرف التطبيق $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ كمايلي :

لكل $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ واذا كان $v_1 = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ، $v_2 = (\beta_1, \dots, \beta_n)$

فأن : $f(v_1, v_2) = v_1 \circ v_2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i$

من الواضح أن f تحقق جميع الشروط في تعريف الضرب السلمي .

4.2.4 تعريف

نسمي الفضاء الشعاعي E ، ذا البعد المنتهي على الحقل IR ، والمعرف عليه الضرب السلمي ، فضاءً أقليدياً . فإذا كان $\circ$ ضرباً سلمياً على E ، نرمز للفضاء الأقليدي E بالرمز $(E,\circ)$. نسمي الفضاء الشعاعي الجزئي E_1 من الفضاء الشعاعي E بالفضاء الأقليدي الجزئي من E.

5.2.4 تعريف

ليكن $(E,\circ)$ فضاءً أقليدياً . لكل $v \in E$ نعرف طول الشعاع v بأنه المقدار $\sqrt{v \circ v}$ ونرمز له بالرمز $\|v\|$ اي ان ، $\|v\| = \sqrt{v \circ v}$.

6.2.4 نظرية

ليكن $(E,\circ)$ فضاءً اقليدياً فإنه :

(1) لكل $v \in E$ ، $v = 0 \iff \|v\| = 0$

(2) لكل $v \in E$ ولكل $\lambda \in IR$ ، $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$

(3) لكل $v_1, v_2 \in E$ ، $|v_1 \circ v_2| \leq \|v_1\| \cdot \|v_2\|$

وتسمى هذه الخاصية ، بخاصية كوشي شفارز .

(4) لكل $v_1, v_2 \in E$ ، $\|v_1 + v_2\| \leq \|v_1\| + \|v_2\|$

وتسمى هذه الخاصية ، بالخاصية المثلثية .

البرهان :

(1) لكل $v \in E$ فأن $\|v\| = \sqrt{v \circ v}$ وكذلك حسب (1.2.4) فأن : $v \circ v = 0 \iff v = 0$ وبذلك فأن : $0 = \|v\| \iff v = 0$

(٢) لكل $v \in E$ ولكل $\lambda \in \mathbb{R}$ فأن :

$$\|\lambda v\| = \sqrt{\lambda v \circ \lambda v} = \sqrt{\lambda^2 (v \circ v)} = |\lambda| \sqrt{v \circ v} = |\lambda| \|v\|$$

(٣) لكل $v_1, v_2 \in E$ واذا كان v_1 هو الشعاع الصفري (أو v_2 هو الشعاع الصفري) فأن : $\|v_1\| \cdot \|v_2\| = 0$

وكذلك $|v_1 \circ v_2| = 0$ فأن : $|v_1 \circ v_2| = \|v_1\| \cdot \|v_2\|$.

لنفرض ان v_2 , v_1 غير معدومان فأنه يوجد $c \in \mathbb{R}$ بحيث $\|v_2\| = c \|v_1\|$ من هنا فأن :

$$v_2 \circ v_2 = \|v_2\|^2 = \|v_2\| \cdot \|v_2\|$$
$$= c\|v_1\| \cdot c\|v_1\| = c^2 \|v_1\|^2 = c^2 (v_1 \circ v_1)$$

ومن هنا فأن ،

$$0 \leq (c v_1 \pm v_2) \circ (c v_1 \pm v_2) = c^2 (v_1 \circ v_1) + (v_2 \circ v_2) \pm 2c(v_1 \circ v_2)$$

اي ان :

$$\pm 2c(v_1 \circ v_2) \leq c^2 (v_1 \circ v_1) + (v_2 \circ v_2)$$

فأن :

$$\pm 2c(v_1 \circ v_2) \leq c^2 \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2$$

وبذلك

$$\pm 2c(v_1 \circ v_2) \leq c \|v_1\| \cdot \|v_2\| + c \|v_1\| \cdot \|v_2\|$$

فأن :

$$\pm 2c(v_1 \circ v_2) \leq 2c \|v_1\| \|v_2\|$$

وبذلك فأن :

$$|v_1 \circ v_2| \leq \|v_1\| \|v_2\|$$

(4) لكل $v_1 , v_2 \in E$ فأن :

$$\|v_1+v_2\|^2 = (v_1+v_2)\circ(v_1+v_2) = v_1\circ v_1 + 2(v_1\circ v_2) + (v_2\circ v_2)$$
$$\leq \|v_1\|^2 + 2\|v_1\|.\|v_2\| + \|v_2\|^2 = (\|v_1\| + \|v_2\|)^2 .$$

فأن :

$$\|v_1+v_2\|^2 \leq (\|v_1\| + \|v_2\|)^2$$

أي أن :

$$\|v_1+v_2\| \leq \|v_1\| + \|v_2\|$$

(و. هـ. م.)

3.4 الفضاءات الأقليدية الجزئية المتعامدة

1.3.4 تعريف

ليكن $(E, \circ)$ فضاءً اقليدياً ، لكل $v_1 , v_2 \in E$ نعرف الزاوية θ بين الشعاعين v_1 , v_2 بأنها :

$$\theta = \arccos\left(\frac{v_1\circ v_2}{\|v_1\|.\|v_2\|}\right)$$

أي أن :

$$\cos\theta = \frac{v_1\circ v_2}{\|v_1\|.\|v_2\|}$$

حيث $0 \leq \theta \leq \pi$

ونقول ان v_1 , v_2 متعامدان اذا كانت الزاوية بينهما هي $\frac{\pi}{2}$. من هنا نرى ان v_1 , v_2 متعامدان $\Longleftrightarrow$ $v_1\circ v_2 = 0$. ونقول أن v_1 عمودي على v_2 (أو ان v_2

عمودي على v_1) ونكتب $v_1 \perp v_2$.

2.3.4 نظرية

ليكن $(E, \circ)$ فضاءً اقليدياً . لكل $v_1, v_2 \in E$ ، إذا كان $v_1 \perp v_2$ فأن : $\|v_1+v_2\|^2 = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2$

البرهان :

$$\|v_1+v_2\|^2 = (v_1+v_2)\circ(v_1+v_2)$$
$$= (v_1\circ v_1)+(v_1\circ v_2)+(v_2\circ v_1)+(v_2\circ v_2)$$

لكن $v_1 \circ v_2 = 0$ ، $v_2 \circ v_1 = 0$ فأن :

$$\|v_1+v_2\|^2 = v_1\circ v_1 + v_2\circ v_2 = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2$$

(و . هـ . م .)

ويمكن تعميم النظرية السابقة كمايلي :

لكل $v_1, \ldots, v_n \in E$ ، إذا كانت الاشعة $v_1, \ldots, v_n$ متعامدة أزواجاً أزواجاً فأن :

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} v_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|v_i\|^2$$

3.3.4 تعريف

ليكن $(E, \circ)$ فضاءً اقليدياً . لكل $v_1, v_2 \in E$ نعرف البعد بين الشعاعين v_1 ، v_2 بأنه العدد الحقيقي $\|v_1 - v_2\|$ ونرمز له بالرمز $d(v_1, v_2)$.

نلاحظ انه لكل $v \in E$ فأن $d(v, v) = 0$.

وكذلك لكل $v_1, v_2 \in E$ فأن $v_1 \neq v_2 \iff d(v_1, v_2) > 0$

وكذلك : $d(v_1, v_2) = \| v_1 - v_2 \| = |-1| \, \| v_2 - v_1 \| = d(v_2, v_1)$

وأخيراً لكل $v_1, v_2, v_3 \in E$ فأن :

$$d(v_1, v_2) + d(v_2, v_3) = \| v_1 - v_2 \| + \| v_2 - v_3 \|$$
$$\geqslant \| v_1 - v_2 + v_2 - v_3 \| = \| v_1 - v_3 \| = d(v_1, v_3)$$

أي أن :

$$d(v_1, v_3) \leq d(v_1, v_2) + d(v_2, v_3)$$

4.3.4 تعريف

ليكن $(E, \circ)$ فضاءً اقليدياً ، $(E_1, \circ)$ فضاءً أقليدياً جزئياً من E . نقول ان الشعاع $v \in E$ عمودي على الفضاء الاقليدي الجزئي E_1 اذا كان v عمودياً على جميع اشعة E_1 . اي انه لكل $u \in E_1$ ، $v \circ u = 0$ ونكتب $v \perp E_1$. نسمي المجموعة $\{v \in E \,;\, v \perp E_1\}$ المكملة العمودية للفضاء الأقليدي الجزئي E_1 ونرمز لها بالرمز $E_1^{\perp}$.

نقول ان الفضاءان الأقليديان الجزئيان E_1 ، E_2 من الفضاء الأقليدي E هما متعامدان اذا كان لكل $v_1 \in E_1$ و لكل $v_2 \in E_2$ ، $v_1 \circ v_2 = 0$ ونكتب عندئذ $E_1 \perp E_2$.

5.3.4 نظرية

ليكن $(E, \circ)$ فضاءً اقليدياً ، E_1 فضاءً اقليدياً جزئياً من E . فأن $E_1^{\perp}$ هو فضاء اقليدي جزئي من E .

البرهان :

لكل $v_1, v_2 \in E_1^{\perp}$ ولكل $x \in E_1$ فأن :

$$(v_1 - v_2) \circ x = v_1 \circ x + (-v_2) \circ x$$
$$= v_1 \circ x + (-1)(v_2 \circ x)$$
$$= 0 + 0 = 0$$

فأن $v_1 - v_2 \in E_1^{\perp}$

لكل $\lambda \in IR$ يكون : $\lambda v_1 \circ x = \lambda (v_1 \circ x) = \lambda . 0 = 0$

ومنه $\lambda v_1 \in E_1^{\perp}$.

بهذا فأن $E_1^{\perp}$ هو فضاء أقليدي جزئي من E .

(و . هـ . م .)

<u>6 . 3 . 4 نظرية</u>

ليكن $(E, \circ)$ فضاء أقليدياً و E_1 فضاء أقليدياً جزئياً من E . ولتكن $\{v_1, \dots, v_n\}$ اساساً للفضاء E_1 فأنه لكل $x \in E$ ،

$$x \perp E_1 \iff x \circ v_i = 0 \quad \text{لكل} \quad i = 1, \dots, n$$

البرهان :

لنفرض ان $x \perp E_1$ فأنه من التعريف لكل $v \in E_1$

$x \circ v = 0$ ، وبذلك فأنه لكل $i = 1, \dots, n$, $x \circ v_i = 0$.

لنفرض الآن انه لكل $i = 1, \dots, n$ فأن $x \circ v_i = 0$.

فأنه لكل $y \in E_1$ ، $y = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ حيث $\lambda_i \in IR$

فأن : $x \circ y = x \circ (\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 (x \circ v_1) + \dots + \lambda_n (x \circ v_n)$

$$= 0 + \dots + 0 = 0$$

فأن $x \perp E_1$ (و . هـ . م .)

4.4 الأســاس المعياري المتعامد

1.4.4 تعريف

ليكن $(E,\circ)$ فضاءً اقليدياً ذا بعد n .
نقول ان الاساس $\{w_1,\dots,w_n\}$ هو اساس متعامد للفضاء الأقليدي E اذا كان كل زوج من هذه الاشعة متعامداً ، اي انه لكل $i\neq j$ فأن $w_i\circ w_j=0$. ونقول ان الاساس $\{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n\}$ هو اساس معياري متعامد اذا كان كل زوج من هذه الاشعة متعامداً وطول كل شعاع هو 1 . اي انه :

$$\varepsilon_i\circ\varepsilon_j=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

2.4.4 نظرية

ليكن $(E,\circ)$ فضاءً اقليدياً ذا بعد n ،
ولتكن $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n$ أشعة من E بحيث ان :

$$\varepsilon_i\circ\varepsilon_j=0 \quad \text{عندما} \quad i\neq j$$

$$\text{و} \quad \varepsilon_i\circ\varepsilon_i=\|\varepsilon_i\|^2=1 \quad \text{لكل} \quad i=1,\dots,n$$

فأن المجموعة $\{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n\}$ هي اساس معياري متعامد للفضاء الأقليدي E .

البرهان :

بما ان $\dim E=n$ وعدد الأشعة $\{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n\}$ هو n فيكفي ان نبرهن ان هذه الاشعة مستقلة خطياً .

لأي $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in IR$ إذا كان $\lambda_1 \varepsilon_1 + \dots + \lambda_i \varepsilon_i + \dots + \lambda_n \varepsilon_n = 0$
فأنه لكل $i = 1, \dots, n$.

$$(\lambda_1 \varepsilon_1 + \dots + \lambda_i \varepsilon_i + \dots + \lambda_n \varepsilon_n) \circ \varepsilon_i = 0$$

من هنا فأن :

$$\lambda_1 (\varepsilon_1 \circ \varepsilon_i) + \dots + \lambda_i (\varepsilon_i \circ \varepsilon_i) + \dots + \lambda_n (\varepsilon_n \circ \varepsilon_i) = 0$$

أي أن :

$$\lambda_1 \cdot 0 + \dots + \lambda_i \cdot 1 + 0 + \dots + 0 = 0$$

ومنه فأن $\lambda_i = 0$ لكل $i = 1, \dots, n$.

اي ان الاشعة $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ مستقلة خطياً .
وبذلك فأن $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ هي اساس معياري متعامد للفضاء الأقليدي E .

(و. هـ. م.)

3.4.4 نظرية

ليكن $(E, \circ)$ فضاءً اقليدياً ذا بعد n ،
ولتكن $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ اساساً معيارياً متعامداً في E ،
فأنه لكل $x, y \in E$ إذا كان : $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varepsilon_i$ ، $y = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \varepsilon_i$
حيث $\mu_i, \lambda_i \in IR$ فأن :

$$x \circ y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \mu_i$$

البرهان :

$$x \circ y = (\lambda_1 \varepsilon_1 + \dots + \lambda_n \varepsilon_n) \circ (\mu_1 \varepsilon_1 + \dots + \mu_n \varepsilon_n)$$

$$= \lambda_1 \mu_1 (\varepsilon_1 \circ \varepsilon_1) + \dots + \lambda_1 \mu_n (\varepsilon_1 \circ \varepsilon_n) + \dots + \lambda_n \mu_1 (\varepsilon_n \circ \varepsilon_1) + \dots + \lambda_n \mu_n (\varepsilon_n \circ \varepsilon_n)$$

$$= \lambda_1 \mu_1 + \dots + \lambda_n \mu_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_i$$

(و. هـ. م.)

4.4.4 طريقة كرام شميت للحصول على اساس متعامد

ليكن $(E,\circ)$ فضاءاً أقليدياً ذا بعد n ،

ولتكن $\{v_1,\ldots,v_n\}$ اساساً في E .

تعتمد طريقة كرام شميت على الاختيار التالي :

$$w_1 = v_1$$

$$w_2 = a_{21} w_1 + v_2$$

- - - - - - - - - - - - - .

$$w_i = a_{i1} w_1 + a_{i2} w_2 + \cdots + a_{ii-1} w_{i-1} + v_i$$

- .

$$w_n = a_{n1} w_1 + a_{n2} w_2 + \cdots + a_{nn-1} w_{n-1} + v_n$$

حيث نوجد $a_{ij} \in \mathbb{R}$ بحيث تكون الاشعة $w_1,\ldots,w_n$ متعامدة فيما بينها ازواجاً ازواجاً .

لكي تكون w_1 , w_2 متعامدين ، فأنه يجب ان يتحقق الشرط : $w_1 \circ w_2 = 0$

اي انه : $w_1 \circ (a_{21} w_1 + v_2) = 0$

فأن : $a_{21}(w_1 \circ w_1) + w_1 \circ v_2 = 0$

أي أن : $a_{21} = -\frac{w_1 \circ v_2}{w_1 \circ w_1} = -\frac{w_1 \circ v_2}{\|w_1\|^2}$

حيث w_1 , v_2 معروفين فنجد a_{21} . وهكذا نجد w_2 عمودي على w_1 .

وهكذا نستمر ونجد الاشعة $w_1,\ldots,w_{i-1}$ متعامدة فيما بينها . بشكل عام لأيجاد الشعاع w_i والمتعامد على جميع الاشعة $w_1,\ldots,w_{i-1}$ فأنه :

ويحقق $\omega_i = a_{i1}\omega_1 + a_{i2}\omega_2 + \cdots + a_{ii-1}\omega_{i-1} + v_i$

$\omega_i \circ \omega_j = 0$ لكل $j = 1, \ldots, i-1$.

$$(a_{i1}\omega_1 + a_{i2}\omega_2 + \cdots + a_{ii-1}\omega_{i-1} + v_i) \circ \omega_1 = 0$$

$$(a_{i1}\omega_1 + a_{i2}\omega_2 + \cdots + a_{ii-1}\omega_{i-1} + v_i) \circ \omega_2 = 0$$

- -

$$(a_{i1}\omega_1 + a_{i2}\omega_2 + \cdots + a_{ii-1}\omega_{i-1} + v_i) \circ \omega_{i-1} = 0$$

بما ان الاشعة $\omega_1, \ldots, \omega_{i-1}$ متعامدة فيما بينها ازواجاً ازواجاً فأن :

$$a_{i1}(\omega_1 \circ \omega_1) + v_i \circ \omega_1 = 0$$

$$a_{i2}(\omega_2 \circ \omega_2) + v_i \circ \omega_2 = 0$$

- - - - - - - - - - - - - - - -

$$a_{ii-1}(\omega_{i-1} \circ \omega_{i-1}) + v_i \circ \omega_{i-1} = 0$$

اي ان :

$$a_{i1} = -\frac{v_i \circ \omega_1}{\omega_1 \circ \omega_1} = -\frac{v_i \circ \omega_1}{\|\omega_1\|^2}$$

$$a_{i2} = -\frac{v_i \circ \omega_2}{\omega_2 \circ \omega_2} = -\frac{v_i \circ \omega_2}{\|\omega_2\|^2}$$

- -

$$a_{ii-1} = -\frac{v_i \circ \omega_{i-1}}{\omega_{i-1} \circ \omega_{i-1}} = -\frac{v_i \circ \omega_{i-1}}{\|\omega_{i-1}\|^2}$$

وهكذا فأن الشعاع ω_n والعمودي على بقية الأشعة $\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}$. يكون $\omega_n = a_{n1}\omega_1 + a_{n2}\omega_2 + \cdots + a_{nn-1}\omega_{n-1} + v_n$

حيث $a_{n1} = -\frac{v_n \circ \omega_1}{\|\omega_1\|^2}, \ldots, a_{nn-1} = -\frac{v_n \circ \omega_{n-1}}{\|\omega_{n-1}\|^2}$.

نبرهن ان الاشعة $\omega_1, \ldots, \omega_n$ مستقلة خطياً .

لأي $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ إذا كان : $\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 + \ldots + \lambda_{n-1}\omega_{n-1} + \lambda_n\omega_n = 0$.

لكن

$$\omega_1 = v_1$$

$$\omega_2 = a_{21}\omega_1 + v_2 = b_{21}v_1 + v_2$$

$$\omega_3 = a_{31}\omega_1 + a_{32}\omega_2 + v_3 = a_{31}v_1 + a_{32}(b_{21}v_1 + v_2) + v_3$$

$$= b_{31}v_1 + b_{32}v_2 + v_3$$

- -

$$\omega_{n-1} = b_{(n-1)1}v_1 + b_{(n-1)2}v_2 + \cdots\cdots + b_{(n-1)(n-2)}v_{n-2} + v_{n-1}$$

$$\omega_n = b_{n1}v_1 + b_{n2}v_2 + \cdots\cdots + b_{n(n-1)}v_{n-1} + v_n$$

فأن :

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2(b_{21}v_1 + v_2) + \lambda_3(b_{31}v_1 + b_{32}v_2 + v_3) + \cdots + \lambda_{n-1}(b_{(n-1)1}v_1 + b_{(n-1)2}v_2 + \cdots$$

$$\cdots + b_{(n-1)(n-2)}v_{n-2} + v_{n-1}) + \lambda_n(b_{n1}v_1 + b_{n2}v_2 + \cdots + b_{n(n-1)}v_{n-1} + v_n) = 0$$

فأن :

$$(\lambda_1 + \lambda_2 b_{21} + \lambda_3 b_{31} + \cdots + \lambda_{n-1}b_{(n-1)1} + \lambda_n b_{n1})v_1 + (\lambda_2 + \lambda_3 b_{32} + \cdots + \lambda_{n-1}b_{(n-1)2} + \lambda_n b_{n2})v_2$$

$$+ \cdots\cdots + (\lambda_{(n-1)} + \lambda_n b_{n(n-1)})v_{n-1} + \lambda_n v_n = 0$$

بما أن الاشعة $v_1, \ldots, v_n$ مستقلة خطياً ، فأن $\lambda_n = 0$

وكذلك $\lambda_{n-1} + \lambda_n b_{n(n-1)} = 0$ فأن $\lambda_{n-1} = 0$ وهكذا .... فأن :

$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{n-1} = \lambda_n = 0$. اي ان الاشعة $\omega_1, \ldots, \omega_n$ مستقلة خطياً.

وبذلك فأن $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ هو اساس متعامد للفضاء الاقليدي E .

فأذا وضعنا $\varepsilon_i = \frac{\omega_i}{\|\omega_i\|}$ لكل $i = 1, \ldots, n$ فأن : $\|\varepsilon_i\| = 1$ لكل

$i = 1, \ldots, n$. بذلك فأننا نحصل على اساس معياري متعامد

$\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ للفضاء الاقليدي انطلاقاً من الاساس $\{v_1, \ldots, v_n\}$.

مثال 5.4.4

ليكن $(E_1, \circ)$ فضاءً أقليدياً جزئياً من الفضاء الأقليدي $\mathbb{R}^4$ على الحقل $\mathbb{R}$. ولتكن :

$$\{ v_1 = (1,2,2,-1) \ , \ v_2 = (1,1,-5,3) \ , \ v_3 = (3,2,8,-7) \}$$

اساساً للفضاء E_1 . لنبحث عن الاساس المتعامد $\{w_1, w_2, w_3\}$ للفضاء الأقليدي E_1 ، فأن :

$$w_1 = v_1$$

$$w_2 = a_{21} w_1 + v_2$$

$$w_3 = a_{31} w_1 + a_{32} w_2 + v_3$$

وكذلك :

$$a_{21} = -\frac{v_2 \circ w_1}{\|w_1\|^2} \ , \ a_{31} = -\frac{v_3 \circ w_1}{\|w_1\|^2} \ , \ a_{32} = -\frac{v_3 \circ w_2}{\|w_2\|^2}$$

فأن : $w_1 = (1,2,2,-1)$.

$$a_{21} = -\frac{(1,1,-5,3)\circ(1,2,2,-1)}{\|(1,2,2,-1)\|^2} = \frac{-1-2+10+3}{1+4+4+1} = \frac{10}{10} = 1$$

اي ان :

$$w_2 = 1 \cdot w_1 + v_2 = (1,2,2,-1) + (1,1,-5,3) = (2,3,-3,2)$$

$$a_{31} = -\frac{(3,2,8,-7)\circ(1,2,2,-1)}{\|(1,2,2,-1)\|^2} = \frac{-30}{10} = -3$$

$$a_{32} = -\frac{(3,2,8,-7)\circ(2,3,-3,2)}{\|(2,3,-3,2)\|^2} = \frac{26}{26} = 1$$

فأن :

$$w_3 = -3(1,2,2,-1) + (2,3,-3,2) + (3,2,8,-7) = (2,-1,-1,-2)$$

واضح ان الاشعة w_1, w_2, w_3 مستقلة خطياً ، وبذلك نستنتج

ان $\{w_1, w_2, w_3\}$ هو اساس للفضاء E_1.

وكذلك

$$w_1 \circ w_2 = (1,2,2,-1) \circ (2,3,-3,2) = 2+6-6-2 = 0$$

$$w_1 \circ w_3 = (1,2,2,-1) \circ (2,-1,-1,-2) = 2-2-2+2 = 0$$

$$w_2 \circ w_3 = (2,3,-3,2) \circ (2,-1,-1,-2) = 4-3+3-4 = 0$$

اي ان الاشعة $\{w_1, w_2, w_3\}$ هو اساس متعامد للفضاء E_1.

من هنا فان :

$$\varepsilon_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|} = \frac{(-1,2,2,-1)}{\sqrt{10}} = \left(\frac{-1}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{-1}{\sqrt{10}}\right)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{(2,3,-3,2)}{\sqrt{26}} = \left(\frac{2}{\sqrt{26}}, \frac{3}{\sqrt{26}}, \frac{-3}{\sqrt{26}}, \frac{2}{\sqrt{26}}\right)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{w_3}{\|w_3\|} = \frac{(2,-1,-1,-2)}{\sqrt{10}} = \left(\frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{-1}{\sqrt{10}}, \frac{-1}{\sqrt{10}}, \frac{-2}{\sqrt{10}}\right)$$

ونلاحظ ان :

$$\|\varepsilon_1\| = \sqrt{\varepsilon_1 \circ \varepsilon_1} = \sqrt{\frac{1}{10}+\frac{4}{10}+\frac{4}{10}+\frac{1}{10}} = 1$$

$$\|\varepsilon_2\| = \sqrt{\varepsilon_2 \circ \varepsilon_2} = \sqrt{\frac{4}{26}+\frac{9}{26}+\frac{9}{26}+\frac{4}{26}} = 1$$

$$\|\varepsilon_3\| = \sqrt{\varepsilon_3 \circ \varepsilon_3} = \sqrt{\frac{4}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{4}{10}} = 1$$

لذلك فأننا حصلنا على الاشعة $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ وهي اساس معياري متعامد للفضاء الاقليدي E_1 انطلاقاً من الاساس $\{v_1, v_2, v_3\}$.

6.4.4 نظرية

ليكن $(E, \circ)$ فضاءاً أقليدياً ذا بعد n ، وليكن

E_1 فضاءاً أقليدياً جزئياً ذا بعد k من الفضاء E.
فأنه يوجد في الفضاء E اساس معياري متعامد $\{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n\}$ بحيث ان $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k \in E_1$ اساس للفضاء E_1
و $\varepsilon_{k+1},\ldots,\varepsilon_n \in E_1^{\perp}$.

البرهان :

لتكن $\{v_1,\ldots,v_k\}$ اساساً في E_1 فأنه حسب (7.5.1) يمكن تكملة هذا الاساس الى اساس للفضاء E . لتكن $\{v_1,\ldots,v_k,v_{k+1},\ldots,v_n\}$ اساساً للفضاء E . من هذا الاساس يمكننا الحصول على اساس متعامد $\{w_1,\ldots,w_n\}$ كمايلي :

$$w_1 = v_1$$

$$w_2 = a_{21} w_1 + v_2$$

- - - - - - - - - ...

$$w_k = a_{k1} w_1 + a_{k2} w_2 + \cdots + a_{kk-1} w_{k-1} + v_k$$

- ...

$$w_n = a_{n1} w_1 + a_{n2} w_2 + \cdots + a_{nn-1} w_{n-1} + v_n$$

بما ان $v_1,\ldots,v_k \in E_1$ فأن $w_1,\ldots,w_k \in E_1$.
الاشعة $\varepsilon_i = \dfrac{w_i}{\|w_i\|}$ لكل $i=1,\ldots,n$ ، هي اشعة معيارية متعامدة وعددها n ، فأنها عبارة عن اساس معياري متعامد للفضاء E .
كذلك نلاحظ ان الاشعة $\varepsilon_i \in E_1$ لكل $i=1,\ldots,k$.
فأن هذه الاشعة اساس معياري متعامد للفضاء E_1 .

وكذلك $\varepsilon_i \circ \varepsilon_{k+j} = 0$ لكل $j = 1, \ldots, n-k$ ، ولكل $i = 1, \ldots, k$

فأن الأشعة

$$\varepsilon_{k+1}, \ldots, \varepsilon_n \in E_1^{\perp} .$$

(و.هـ.م.)

7.4.4 نظرية

ليكن $(E, \circ)$ فضاءً اقليدياً ذا بعد n ، وليكن E_1 فضاءً اقليدياً جزئياً من E ، فأن : $E = E_1 \oplus E_1^{\perp}$

البرهان :

إذا كان E_1 بعده k مثلاً فأنه حسب (6.4.4) يوجد اساس معياري متعامد $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ للفضاء E بحيث أن $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k$ اساس للفضاء E_1 و $\varepsilon_{k+1}, \ldots, \varepsilon_n \in E_1^{\perp}$.
لكل $x \in E$ فأن $x = \lambda_1 \varepsilon_1 + \cdots + \lambda_n \varepsilon_n$ حيث $\lambda_i \in I\!R$.
وكذلك $\lambda_1 \varepsilon_1 + \cdots + \lambda_k \varepsilon_k \in E_1$ و $\lambda_{k+1} \varepsilon_{k+1} + \cdots + \lambda_n \varepsilon_n \in E_1^{\perp}$
بذلك فأنه لكل $x \in E$ فأن $x = a + b$ حيث $a \in E_1$ ، $b \in E_1^{\perp}$ ومنه $E \subseteq E_1 + E_1^{\perp}$. وبما أن $E_1 + E_1^{\perp} \subseteq E$ فأن $E = E_1 + E_1^{\perp}$. لكل $x \in E_1 \cap E_1^{\perp}$ فأن $x \in E_1$ و $x \in E_1^{\perp}$.
اي ان $x \circ x = 0$ وهذا غير ممكن لأنه $\varepsilon_i \circ \varepsilon_i = 1$ لكل $i = 1, \ldots, n$ وبذلك فأن $E_1 \cap E_1^{\perp} = \{0\}$ اي ان $E = E_1 \oplus E_1^{\perp}$.

(و. هـ.م.)

من النظرية السابقة ومن النظرية (10.5.1) ينتج مباشرة النتيجة التالية .

8.4.4 نتيجة

ليكن $(E, \circ)$ فضاءاً أقليدياً ، E_1 فضاءاً أقليدياً جزئياً من E ، فأن : $\dim E = \dim E_1 + \dim E_1^{\perp}$.

5.4 التطبيقات العمودية والمصفوفات المتعامدة

1.5.4 تعريف

ليكن $(E_1, \circ)$ ، $(E_2, \acute{\circ})$ فضاءين أقليديين ، وليكن $f \in L(E_1, E_2)$. نقول ان f تطبيق عمودي إذا كان لكل $v, u \in E_1$ ، $f(v) \acute{\circ} f(u) = v \circ u$

نلاحظ من هذا التعريف مباشرة انه إذا كان $u = v$ فأن:

$$f(v) \acute{\circ} f(v) = v \circ v$$

أي أن: $\|f(v)\|^2 = \|v\|^2$

2.5.4 مثال

ليكن $E_1 = E_2 = \mathbb{R}^2$ فضاءاً اقليدياً على الحقل $\mathbb{R}$.

لكل $v, u \in \mathbb{R}^2$ حيث $v = (v_1, v_2)$ ، $u = (u_1, u_2)$ فأن

$v \circ u = v_1 u_1 + v_2 u_2$ لاحظ المثال (3.2.4).

ليكن $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ تطبيقاً معرفاً كما يلي :

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ , \ f(x_1, x_2) = (-x_1, x_2)$$

فأن f تطبيق عمودي لأنه :

$$f(v) \circ f(u) = f(v_1, v_2) \circ f(u_1, u_2) = (-v_1, v_2) \circ (-u_1, u_2)$$

$$= v_1 u_1 + v_2 u_2 = (v_1, v_2) \circ (u_1 \circ u_2) = v \circ u$$

3.5.4 نظرية

ليكن $(E, \circ)$ فضاءً اقليدياً . ولتكن $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ أشعة معيارية متعامدة في E ، وليكن $f : E \to E$ تطبيقاً عمودياً ، فأن مجموعة الاشعة $f(\varepsilon_1), \ldots, f(\varepsilon_n)$ هي مجموعة معيارية متعامدة .

البرهان :

لكل $i, j = 1, \ldots, n$ بحيث $i \neq j$ فأن :

$$f(\varepsilon_i) \circ f(\varepsilon_j) = \varepsilon_i \circ \varepsilon_j = 0$$

اي ان الاشعة $f(\varepsilon_1), \ldots, f(\varepsilon_n)$ متعامدة .

بما انه لكل $i = 1, \ldots, n$ فأن : $\|\varepsilon_i\|^2 = 1$ ، لذلك فأن :

$$\|f(\varepsilon_i)\|^2 = \|\varepsilon_i\|^2 = 1$$

ومنه نستنتج ان مجموعة الاشعة $f(\varepsilon_1), \ldots, f(\varepsilon_n)$ مجموعة معيارية متعامدة .

(و . هـ . م .)

4.5.4 تعريف

لتكن $A = (a_{ij}) \in M_n(IR)$. نقول ان المصفوفة A هي مصفوفة متعامدة إذا وفقط إذا كانت اشعة اعمدة المصفوفة A مجموعة معيارية متعامدة .

فأذا رمزنا لأعمدة المصفوفة A بالرمز $c_1, \ldots, c_n$ فأن

A متعامدة $\Longleftrightarrow$ $c_i \circ c_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ لكل $i, j = 1, \ldots, n$.

5.5.4 نظرية

$A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ مصفوفة متعامدة $\Leftrightarrow A^T A = I_n$.

البرهان :

لتكن

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

، ولتكن c_i اشعة اعمدة المصفوفة A ، فأن :

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

فأنه لكل $i, j = 1, \ldots, n$ إذا كان $c_i \circ c_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ فأن:

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = I_n$$

وبالعكس إذا كانت : $A^T A = I_n$ فأن $c_i \circ c_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

لكل $i, j = 1, \ldots, n$.

فأن اشعة اعمدة المصفوفة A مجموعة معيارية متعامدة ومنه المصفوفة A هي مصفوفة متعامدة.

(و . هـ . م .)

لنلاحظ هنا ، انه إذا كانت A مصفوفة متعامدة ، فأن اشعة اعمدة A مستقلة خطياً ، ومنه فأن التطبيق الخطي المرافق للمصفوفة A تقابل ، ومنه نستنتج إذا كانت A مصفوفة متعامدة فأن A عكوس .

6.5.4 نظرية

(1) المصفوفة الحيادية هي مصفوفة متعامدة .

(2) لكل $A \in M_n(IR)$ فأن A مصفوفة متعامدة $\Leftrightarrow A^T = A^{-1}$

(3) حاصل ضرب مصفوفتين متعامدتين هي مصفوفة متعامدة .

(4) محدد المصفوفة المتعامدة يساوي ± 1 .

(5) المصفوفة المعكوسة للمصفوفة المتعامدة هي مصفوفة متعامدة .

البرهان :

(1) اذا كانت $I_n \in M_n(IR)$ ، فأنه من الواضح ان :

$I_n^T I_n = I_n$ ومنه I_n مصفوفة متعامدة .

(2) اذا كانت A مصفوفة متعامدة فأنه حسب

$(5.5.4)$ $A^T A = I_n$ فأن $A^T = A^{-1}$.

وبالعكس اذا كانت $A^T = A^{-1}$ فأن : $A^T A = A^{-1} A = I_n$

ومنه A مصفوفة متعامدة .

(3) لنفرض ان $A, B \in M_n(IR)$ مصفوفتين متعامدتين

فأنه حسب (2) فأن $A^T = A^{-1}$ ، $B^T = B^{-1}$.

ومنه : $(AB)^T = B^T A^T = B^{-1} A^{-1} = (AB)^{-1}$

فأنه حسب (2) تكون AB مصفوفة متعامدة .

(4) لتكن $A \in M_n(IR)$ مصفوفة متعامدة ، عندئذ

$A^T . A = I_n$. من هنا فأن :

$$\det(A)^2 = \det(A) . \det(A) = \det(A^T) . \det A = \det(A^T A)$$
$$= \det(I_n) = 1$$

فأن $\det(A) = \pm 1$

(5) لتكن المصفوفة $A \in M_n(\mathbb{R})$ مصفوفة متعامدة فأن $A^T = A^{-1}$. ولتكن $A^{-1} = C$ نبرهن ان C متعامدة
نلاحظ ان : $C^{-1} = (A^{-1})^{-1} = (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T = C^T$
بهذا نستنتج ان C مصفوفة متعامدة.
(و.هـ.م.)

7.5.4 نظرية

ليكن (E_1, o) ، (E_2, o') فضاءين اقليديين ذوي لبعدين n . ولتكن $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ اساساً معيارياً متعامداً في E_1 ، $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ اساساً معيارياً متعامداً في E_2 . وليكن $f \in L(E_1, E_2)$. فأن f ليكون تطبيقاً عمودياً $\Longleftrightarrow$ المصفوفة المرافقة للتطبيق f بالنسبة للاساسين المذكورين مصفوفة متعامدة.

البرهان :

لتكن $A = (a_{ij}) = M(f)$ المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي f بالنسبة للأساس $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ في E_1 والاساس $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ في E_2 . لنرمز لأعمدة هذه المصفوفة بـ $c_1, \ldots, c_n$
لنفرض ان "o هو الضرب السلمي في $\mathbb{R}^n$. فأنه لكل i, j :

$$f(\varepsilon_i) = a_{1i}\beta_1 + \cdots + a_{ni}\beta_n$$
$$f(\varepsilon_j) = a_{1j}\beta_1 + \cdots + a_{nj}\beta_n$$

فأن : $$f(\varepsilon_i)\, o'\, f(\varepsilon_j) = \left(\sum_{p=1}^{n} a_{pi}\beta_p\right) o' \left(\sum_{q=1}^{n} a_{qj}\beta_q\right)$$

$$= \sum_{p,q=1}^{n} a_{pi}\, a_{qj}\, (\beta_p \,o'\, \beta_q) = \sum_{p=1}^{n} a_{pi}\, a_{pj}\, (\beta_p \,o'\, \beta_p)$$

$$= \sum_{p=1}^{n} a_{pi}\, a_{pj}$$

وكذلك :

$$c_i \,o''\, c_j = (a_{1i}, \ldots, a_{ni}) \,o''\, (a_{1j}, \ldots, a_{nj}) = \sum_{p=1}^{n} a_{pi}\, a_{pj}$$

اي ان :

$$f(\varepsilon_i) \,o'\, f(\varepsilon_j) = c_i \,o''\, c_j$$

فاذا كان f تطبيقاً عمودياً فأنه لكل $i, j = 1, \ldots, n$:

$$c_i \,o''\, c_j = f(\varepsilon_i) \,o'\, f(\varepsilon_j) = \varepsilon_i \,o\, \varepsilon_j = \begin{cases} 1 & \text{عندما } i=j \\ 0 & \text{عندما } i \neq j \end{cases}$$

وبذلك نستنتج ان المجموعة $c_1, \ldots, c_n$ هي مجموعة معيارية متعامدة . اي ان اعمدة المصفوفة A هي مجموعة معيارية متعامدة ، ومنه فأن المصفوفة A هي مصفوفة متعامدة. وبالعكس، اذا كانت A مصفوفة متعامدة ، فأن المجموعة $c_1, \ldots, c_n$ مجموعة معيارية متعامدة . بما ان الاشعة $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ مجموعة معيارية متعامدة ، فأنه لكل $i, j = 1, \ldots, n$

اذا كان $i \neq j$ فأن : $c_i \,o''\, c_j = 0 = \varepsilon_i \,o\, \varepsilon_j$

اذا كان $i = j$ فأن : $c_i \,o''\, c_j = 1 = \varepsilon_i \,o\, \varepsilon_j$

من هنا فأنه لكل $x, y \in E_1$ حيث $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varepsilon_i$ ، $y = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \varepsilon_j$

$$f(x) \,o'\, f(y) = f\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varepsilon_i\Big) \,o'\, f\Big(\sum_{j=1}^{n} \gamma_j \varepsilon_j\Big)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \gamma_j \left(f(\varepsilon_i) \, o' \, f(\varepsilon_j) \right) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \gamma_j \left(c_i \, o'' \, c_j \right)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \gamma_j \left(\varepsilon_i \circ \varepsilon_j \right)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varepsilon_i \right) \circ \left(\sum_{j=1}^{n} \gamma_j \varepsilon_j \right) = x \circ y$$

بهذا نستنتج ان f عمودي

(و.هـ.م.)

8.5.4 تعريف

ليكن (E_1, o) ، (E_2, o') فضاءين أقليديين وليكن $f \in L(E_1, E_2)$. نسمي التطبيق $f^* : E_2 \to E_1$ بالتطبيق الثنوي للتطبيق f إذا وفقط إذا كان لكل $v \in E_1$ ولكل $u \in E_2$ ،

$$f(v) \, o' \, u = v \circ f^*(u)$$

إذا كان $f : E_1 \to E_1$ عندئذ نقول ان التطبيق f هو التطبيق الثنوي لنفسه إذا كان $f = f^*$ ، اي انه لكل $v, u \in E_1$ فأن : $f(v) \circ u = v \circ f(u)$.

9.5.4 نظرية

ليكن (E_1, o) ، (E_2, o') فضاءين اقليديين ذي بعدين n ، m على التوالي . وليكن $f \in L(E_1, E_2)$ فأنه يوجد f^* وحيد من E_2 في E_1 بحيث أنه لكل $v \in E_1$ ولكل

$u \in E_2$ فأن : $f(v) \circ' u = v \circ f^*(u)$.

البرهان :

لتكن $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ اساساً معيارياً متعامداً للفضاء E_1

$\{\beta_1, \dots, \beta_m\}$ ، اساساً معيارياً متعامداً للفضاء E_2 .

وليكن $f : E_1 \to E_2$ تطبيقاً خطياً ، فأنه لكل $v \in E_1$

$v = \lambda_1 \varepsilon_1 + \dots + \lambda_n \varepsilon_n$ حيث $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. ولتكن $A = (a_{ij})$

المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي f بالنسبة للأساسين

المذكورين . فأن :

$$f(v) = f(\lambda_1 \varepsilon_1 + \dots + \lambda_n \varepsilon_n) = \lambda_1 f(\varepsilon_1) + \dots + \lambda_n f(\varepsilon_n)$$

وأن :

$$f(v) = (\lambda_1 a_{11} + \dots + \lambda_n a_{1n})\beta_1 + \dots + (\lambda_1 a_{m1} + \dots + \lambda_n a_{mn})\beta_m$$

ليكن $f^* : E_2 \to E_1$ معرفاً كما يلي :

$$\forall\, u = \gamma_1 \beta_1 + \dots + \gamma_m \beta_m \in E_2 \ , \quad \gamma_1, \dots, \gamma_m \in \mathbb{R}$$

$$f^*(u) = f^*(\gamma_1 \beta_1 + \dots + \gamma_m \beta_m) = (a_{11}\gamma_1 + \dots + a_{m1}\gamma_m)\varepsilon_1 + \dots$$

$$\dots + (a_{1n}\gamma_1 + \dots + a_{mn}\gamma_m)\varepsilon_n$$

واضح ان f^* تطبيق . نبرهن ان f^* خطي .

لكل $v, u \in E_2$ حيث $v = \alpha_1 \beta_1 + \dots + \alpha_m \beta_m$ ، $u = \gamma_1 \beta_1 + \dots + \gamma_m \beta_m$

و $\gamma_1, \dots, \gamma_m \in \mathbb{R}$ ، $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ فأن :

$$f^*(u+v) = f^*((\gamma_1 + \alpha_1)\beta_1 + \dots + (\gamma_m + \alpha_m)\beta_m)$$

$$= (a_{11}(\gamma_1 + \alpha_1) + \dots + a_{m1}(\gamma_m + \alpha_m))\varepsilon_1 + \dots + (a_{1n}(\gamma_1 + \alpha_1) + \dots + a_{mn}(\gamma_m + \alpha_m))\varepsilon_n$$

$$= f^*(u) + f^*(v)$$

وكذلك لكل $\lambda \in \mathbb{R}$ فأن :

$$f^*(\lambda u) = f^*(\lambda \gamma_1 \beta_1 + \cdots + \lambda \gamma_m \beta_m) = (a_{11} \lambda \gamma_1 + \cdots + a_{m1} \lambda \gamma_m) \varepsilon_1 + $$
$$+ \cdots + (a_{1n} \lambda \gamma_1 + \cdots + a_{mn} \lambda \gamma_m) \varepsilon_n$$
$$= \lambda f^*(u)$$

بهذا فأن f^* خطي ، والمصفوفة المرافقة له هي A^T .

لكل $x = \lambda_1 \varepsilon_1 + \cdots + \lambda_n \varepsilon_n \in E_1$ بما ان $\beta_1, \ldots, \beta_m$ اسس معيارية متعامدة ، و $f(x) = \lambda_1 f(\varepsilon_1) + \cdots + \lambda_n f(\varepsilon_n)$ فأنه لكل $k = 1, \ldots, m$ فأن :

$$f(x) \circ' \beta_k = \left(\left(\sum_{i=1}^{n} a_{1i} \lambda_i \right) \beta_1 + \cdots + \left(\sum_{i=1}^{n} a_{mi} \lambda_i \right) \beta_m \right) \circ' \beta_k$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ki} \lambda_i (\beta_k \circ' \beta_k) = \sum_{i=1}^{n} a_{ki} \lambda_i$$

ومن جهة اخرى بما ان :

$$f^*(\beta_k) = a_{k1} \varepsilon_1 + \cdots + a_{kn} \varepsilon_n$$

لكل $k = 1, \ldots, m$ فأن :

$$x \circ f^*(\beta_k) = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varepsilon_i \right) \circ (a_{k1} \varepsilon_1 + \cdots + a_{kn} \varepsilon_n)$$

$$= \lambda_1 a_{k1} (\varepsilon_1 \circ \varepsilon_1) + \cdots + \lambda_n a_{kn} (\varepsilon_n \circ \varepsilon_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_{ki}$$

فأنه بذلك :

$$f(x) \circ' \beta_k = x \circ f^*(\beta_k) \quad , \quad k = 1, \ldots, m \text{ لكل}$$

وبذلك فأنه لكل $y = \gamma_1 \beta_1 + \cdots + \gamma_m \beta_m \in E_2$ يكون :

$$f(x) \circ' y = f(x) \circ' \left(\sum_{k=1}^{m} \gamma_k \beta_k \right) = \sum_{k=1}^{m} \gamma_k (f(x) \circ' \beta_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \gamma_k (x \circ f^*(\beta_k)) = x \circ \sum_{k=1}^{m} \gamma_k f^*(\beta_k)$$

$$= x \circ f^*\left(\sum_{k=1}^{m} \gamma_k \beta_k\right) = x \circ f^*(y)$$

بهذا نستنتج ان f^* هو التطبيق الثنوي للتطبيق f.

اذا كان f_1^* تطبيقاً ثنوياً اخر للتطبيق f ، فأنه لكل $y \in E_2$ ، نضع $x = (f_1^* - f^*)(y)$ حيث $x \in E_1$ فأن:

$$f(x) \circ' y = x \circ f_1^*(y)$$

وكذلك

$$f(x) \circ' y = x \circ f^*(y)$$

من هنا فأن :

$$0 = (x \circ f_1^*(y)) - (x \circ f^*(y)) = x \circ (f_1^* - f^*)(y)$$

وبذلك فأن :

$$(f_1^* - f^*)(y) \circ (f_1^* - f^*)(y) = 0$$

اي ان :

$$(f_1^* - f^*)(y) = 0$$

وبهذا فأن $f_1^*(y) = f^*(y)$ لكل $y \in E_2$.

فأن $f_1^* = f^*$.

(و. هـ. م.)

10.5.4 نظرية

ليكن $(E_1, \circ)$ ، $(E_2, \circ')$ فضاءين أقليديين ،

وليكن $f \in L(E_1, E_2)$. فأن f عمودي $\Leftrightarrow f^* = f^{-1}$

البرهان :

لنفرض ان $f^* = f^{-1}$ ، فأنه لكل $u, v \in E_1$ فأن

. $f(v), f(u) \in E_2$

فأنه :

$$f(v) \circ' f(u) = v \circ f^{*}(f(u)) = v \circ f^{-1}(f(u)) = v \circ u$$

وبذلك فأن f يكون تطبيقاً عمودياً

لنفرض الآن ان f عمودي ، فأنه لكل $v_1, v_2 \in E_1$ ،

$$f(v_1) \circ' f(v_2) = v_1 \circ v_2$$

فأنه لكل $v \in E_1$ ولكل $u \in E_2$:

$$f(v) \circ' u = f(v) \circ' f(f^{-1}(u)) = v \circ f^{-1}(u)$$

فأن $f^{*} = f^{-1}$.

(و. هـ. م.)

6.4 الفضاء الهيرميتي

1.6.4 تعريف

ليكن H_1 ، H_2 فضاءين شعاعيين على حقل الاعداد العقدية $\mathbb{C}$ ، وليكن f تطبيقاً من H_1 في H_2. نقول ان التطبيق f هو تطبيق نصف خطي إذا تحقق مايلي :-

(1) لكل $u, v \in H_1$ ، $f(u+v) = f(u) + f(v)$

(2) لكل $u \in H_1$ ولكل $\lambda \in \mathbb{C}$ ، $f(\lambda u) = \bar{\lambda} f(u)$

إذا كان $f : H_1 \to \mathbb{C}$ تطبيقاً وحقق (1) و (2) عندئذ نقول ان f هو شكل نصف خطي على H_1 .

2.6.4 تعريف

ليكن H فضاءاً شعاعياً على الحقل $\mathbb{C}$. وليكن $f : H \times H \to \mathbb{C}$ تطبيقاً . نقول ان f هو شكل ثلاثة أنصاف الخطية على H ، إذا كان لكل $u_1, u_2, u_3 \in H$ ولكل $\lambda \in \mathbb{C}$ فأن :

$$f(u_1+u_2, u_3) = f(u_1, u_3) + f(u_2, u_3) \qquad (1)$$

$$f(u_1, u_2+u_3) = f(u_1, u_2) + f(u_1, u_3)$$

$$f(\lambda u_1, u_2) = \lambda f(u_1, u_2) \qquad (2)$$

$$f(u_1, \lambda u_2) = \bar{\lambda} f(u_1, u_2)$$

ونقول ان f هو شكل هيرميتي على H إذا كان :-

$$\forall u_1, u_2 \in H, \quad f(u_1, u_2) = \overline{f(u_2, u_1)}$$

ونقول ان الشكل الهيرميتي f محددة موجبة إذا كان :

لكل $u \in H$ ، $f(u,u) \geqslant 0$

و $u = 0 \Leftrightarrow f(u,u) = 0$

3.6.4 مثال

على الفضاء الشعاعي $\mathbb{C}^n$ على الحقل $\mathbb{C}$ لنعرف التطبيق $f : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ كما يلي :-

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \ , \ y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n ; \ f(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$$

فأن f هو شكل هيرميتي على الفضاء $\mathbb{C}^n$.

تعريف 4.6.4

ليكن H فضاءً شعاعياً ذا بعد n على الحقل $\mathbb{C}$. ولتكن $\{v_1, \dots, v_n\}$ اساساً في H ، وليكن f شكلاً هرميتياً على H . فأنه لكل $v, u \in H$ ،

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \quad , \quad u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$$

حيث $\alpha_i, \lambda_i \in \mathbb{C}$. من هنا ومن كون f شكل هيرميتي فأن :

$$\begin{aligned} f(v, u) &= f(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \,,\, \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) \\ &= \alpha_1 \bar{\lambda}_1 f(v_1, v_1) + \dots + \alpha_1 \bar{\lambda}_n f(v_1, v_n) + \dots + \alpha_n \bar{\lambda}_1 f(v_n, v_1) \\ &\quad + \dots + \alpha_n \bar{\lambda}_n f(v_n, v_n) \end{aligned}$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} f(v_i, v_j)\, \alpha_i \bar{\lambda}_j$$

حيث $f(v_i, v_j) \in \mathbb{C}$. فإذا وضعنا $f(v_i, v_j) = a_{ij}$ لكل $i, j = 1, \dots, n$ فأن :

$$f(v, u) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, \alpha_i \bar{\lambda}_j$$

حيث λ_j هي مركبات الشعاع u ، α_i هي مركبات الشعاع v في الاساس $\{v_1, \dots, v_n\}$.

نسمي المصفوفة $A = (a_{ij})$ بالمصفوفة المرافقة للشكل الهيرميتي f في الأساس $\{v_1, \dots, v_n\}$.

لتكن الآن $\{u_1, \dots, u_n\}$ اساساً آخر في H ، فأن:

$$u_1 = c_{11} v_1 + c_{21} v_2 + \dots + c_{n1} v_n$$

$$u_2 = c_{12} v_1 + c_{22} v_2 + \dots + c_{n2} v_n$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$u_n = c_{1n}v_1 + c_{2n}v_2 + \cdots + c_{nn}v_n$$

حيث $c_{ij} \in \mathbb{C}$. فأن مصفوفة العبور من الأساس $\{v_1, \ldots, v_n\}$ الى الاساس $\{u_1, \ldots, u_n\}$ هي :

$$C = (c_{ij}) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

نجد المصفوفة المرافقة للشكل الهيرميتي f في الاساس $\{u_1, \ldots, u_n\}$ ولتكن $B = (b_{ij})$ ، فأنه لكل $1 \le p \le n$ ، $1 \le q \le n$:

$$b_{pq} = f(u_p, u_q) = f(c_{1p}v_1 + c_{2p}v_2 + \cdots + c_{np}v_n \,,\, c_{1q}v_1 + c_{2q}v_2 + \cdots + c_{nq}v_n)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} f(v_i, v_j)\, c_{ip}\, \overline{c_{jq}}$$

لكن مما سبق لدينا $f(v_i, v_j) = a_{ij}$ لكل $i,j = 1, \ldots, n$

فأن :

$$b_{pq} = \sum_{i,j=1}^{n} c'_{pi}\, a_{ij}\, \overline{c_{jq}}$$

حيث $c'_{pi} = c_{ip}$ هي عناصر المصفوفة C^T .

فأذا رمزنا للمصفوفة التي عناصرها $\overline{c_{ij}}$ بالرمز $\overline{C}$

فأن : $B = C^T A \overline{C}$

5.6.4 تعريف

ليكن H فضاءاً شعاعياً ذا بعد منتهي على الحقل

$\mathbb{C}$ ، وليكن f شكلاً هيرميتياً محدداً موجباً على H .
نقول عندئذ ان H هو فضاء هيرميتي ، ونقول ان f هو
الضرب السلمي على H . فاذا رمزنا للضرب السلمي
بالرمز $\circ$ فأننا نرمز للفضاء الهيرميتي بالرمز $(H, \circ)$.
الفضاء الشعاعي الجزئي في H نسميه بالفضاء الهيرميتي
الجزئي .
في المثال (3.6.4) فأن $(\mathbb{C}^n, \circ)$ هو فضاء هيرميتي .

6.6.4 تعريف

ليكن $(H, \circ)$ فضاءً هيرميتياً . لكل $u, v \in H$
نقول ان v عمودي على u (أو u عمودي على v) ونكتب
$u \perp v$ اذا كان $v \circ u = 0$.
نقول عن الأساس $\{w_1, \dots, w_n\}$ للفضاء H انه اساس متعامد
اذا كان : $w_i \circ w_j = 0$ لكل $i \neq j$.
ونقول عن الاساس $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ للفضاء H انه
اساس معياري متعامد اذا كان :

$$\varepsilon_i \circ \varepsilon_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

ليكن H_1 فضاءً هيرميتياً جزئياً في H ، نقول
ان الشعاع $u \in H$ عمودي على الفضاء H_1 اذا كان
$u \circ u_1 = 0$ لكل $u_1 \in H_1$ ونكتب $u \perp H_1$.
نسمي المجموعة $\{u \in H ; u \perp H_1\}$ بالمكملة العمودية

للفضاء الهيرميتي الجزئي H_1 ونرمز لها بالرمز $H_1^{\perp}$.
ونقول ان الفضاءين الهيرميتين الجزئيين H_1 ، H_2 من الفضاء H أنهما متعامدين اذا كان لكل $v_1 \in H_1$ ، ولكل $v_2 \in H_2$ ، $v_1 \circ v_2 = 0$ ونكتب $H_1 \perp H_2$.

نظرية 7.6.4

ليكن $(H, \circ)$ فضاءاً هيرميتياً ، فأن :

(1) لكل $v \in H$ ، $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$

(2) لكل $v \in H$ ولكل $\lambda \in \mathbb{C}$ ، $\|\lambda v\| = |\lambda| . \|v\|$

(3) لكل $v_1 , v_2 \in H$ ، $|v_1 \circ v_2| \leq \|v_1\| . \|v_2\|$

(4) لكل $v_1 , v_2 \in H$ ، $\|v_1 + v_2\| \leq \|v_1\| + \|v_2\|$.

واذا كان v_1 ، v_2 متعامدين فأن :

$$\|v_1 + v_2\|^2 = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2$$

البرهان :

برهان جميع فروع النظرية مشابهة لبرهان النظرية (6.2.4) مع مراعاة خواص الاعداد العقدية ، لذلك سنبرهن احد الفروع كنموذج ليكن (4) .

$$\|v_1 + v_2\|^2 = (v_1 + v_2) \circ (v_1 + v_2) = (v_1 \circ v_1) + (v_1 \circ v_2) + (v_2 \circ v_1) + (v_2 \circ v_2)$$

$$= \|v_1\|^2 + (v_1 \circ v_2) + \overline{(v_1 \circ v_2)} + \|v_2\|^2$$

$$= \|v_1\|^2 + 2\mathcal{R}(v_1 \circ v_2) + \|v_2\|^2$$

$$\leq \|v_1\|^2 + 2|v_1 \circ v_2| + \|v_2\|^2$$

$$\leq \|v_1\|^2 + 2\|v_1\| \|v_2\| + \|v_2\|^2$$

فأن ،
$$\|v_1+v_2\|^2 \leq (\|v_1\|+\|v_2\|)^2$$

من هنا نستنتج
$$\|v_1+v_2\| \leq \|v_1\| + \|v_2\|$$

اذا كان v_1 ، v_2 متعامدين فأن : $v_1 \circ v_2 = v_2 \circ v_1 = 0$

فأن :
$$\|v_1+v_2\|^2 = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2$$

(و. هـ. م.)

8.6.4 نظرية

ليكن $(H, \circ)$ فضاءً هيرميتياً ذا بعد n، ولتكن $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ اساساً معيارياً متعامداً في H . فأنه لكل $x, y \in H$ اذا كان $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varepsilon_i$ ، $y = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \varepsilon_i$ حيث $\mu_i, \lambda_i \in \mathbb{C}$ فأن :
$$x \circ y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \bar{\mu}_i \ .$$

البرهان :

$$\begin{aligned} x \circ y &= (\lambda_1\varepsilon_1 + \dots + \lambda_n\varepsilon_n) \circ (\mu_1\varepsilon_1 + \dots + \mu_n\varepsilon_n) \\ &= \lambda_1\bar{\mu}_1(\varepsilon_1 \circ \varepsilon_1) + \dots + \lambda_1\bar{\mu}_n(\varepsilon_1 \circ \varepsilon_n) + \dots + \lambda_n\bar{\mu}_1(\varepsilon_n \circ \varepsilon_1) + \\ &\quad \dots + \lambda_n\bar{\mu}_n(\varepsilon_n \circ \varepsilon_n) \\ &= \lambda_1\bar{\mu}_1 + \dots + \lambda_n\bar{\mu}_n \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \bar{\mu}_i \end{aligned}$$

(و. هـ. م.)

نرى ان مفهوم التعامد والنظريات المتعلقة به في الفضاء الأقليدي ينتقل الى الفضاء الهيرميتي مع بعض التغيرات المتعلقة بالفرق بين الضرب السلمي في الفضاء الأقليدي

والفضاء الهيرميتي . لذلك فأننا سنترك دراسة تلك النظريات والمفاهيم للقارئ ، فمثلاً طريقة كرام شميت للحصول على اساس متعامد في الفضاء الأقليدي يمكن بحثها بنفس الطريقة في الفضاء الهيرميتي وسنتركها للقارئ . كما وسنترك للقارئ برهان النظرية التالية :

9.6.4 نظرية

ليكن (H,σ) فضاءً هيرميتياً ذا بعد n ، H_1 فضاءً هيرميتياً جزئياً في H ، فأن :

(1) $H_1^{\perp}$ هو فضاء هيرميتي جزئي في H .

(2) لكل $x \in H$ فأن $x \perp H_1 \Leftrightarrow x$ عمودي على جميع اشعة أساس H_1 .

(3) واذا كانت $\{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n\}$ اشعة معيارية متعامدة في H ، فأن $\{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n\}$ تكون اساساً معيارياً متعامداً في H .

(4) واذا كان بعد H_1 هو k فأنه يوجد اساس معياري متعامد $\{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n\}$ في H بحيث أن

$$\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k \in H_1 \quad \text{و} \quad \varepsilon_{k+1},\dots,\varepsilon_n \in H_1^{\perp} .$$

(5) $H = H_1 \oplus H_1^{\perp}$ وكذلك :

$$\dim H = \dim H_1 + \dim H_1^{\perp}$$

10.6.4 تعريف

ليكن (H_1,σ) ، (H_2,σ') فضاءين هيرميتيين

وليكن $f \in L(H_1, H_2)$.

(1) نقول ان f هو تطبيق احادي إذا كان :

$$\forall v, u \in H_1 , \quad f(v) \circ' f(u) = v \circ u$$

(2) نقول ان $f^* \in L(H_2, H_1)$ هو التطبيق الثنوي للتطبيق f إذا كان :

$$\forall v \in H_1 , \forall u \in H_2 , \quad f(v) \circ' u = v \circ f^*(u)$$

وإذا كان $f : H_1 \to H_1$ بحيث ان $f = f^*$ نقول عندئذ ان f هو التطبيق الثنوي لنفسه .

نستنتج من التعريف السابق مباشرة ، إذا كان $(H, \circ)$ فضاءً هيرميتياً و $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ اسرة معيارية متعامدة في H ، $f : H \to H$ تطبيقاً احادياً ، فأن الاسرة $f(\varepsilon_1), \dots, f(\varepsilon_n)$ هي اسرة معيارية متعامدة .

وكذلك حسب النظرية $(10.5.4)$ f يكون احادياً $\Leftrightarrow f^* = f^{-1}$ $\Leftrightarrow f \circ f^* = Id_H$.

11.6.4 تعريف

لتكن $A \in M_n(\mathbb{C})$ ، نسمي المصفوفة $\bar{A}^T$ ثنوية المصفوفة A ونرمز لها بالرمز A^* . ونقول ان A هي مصفوفة هيرميتية إذا كانت $A = A^*$.

ونقول ان المصفوفة A هي مصفوفة احادية إذا كانت اسرة اعمدة A تكوّن مجموعة معيارية متعامدة .

12.6.4 نظرية

المصفوفة $A \in M_n(\mathbb{C})$ هي مصفوفة احادية $\Leftrightarrow$ $A^*A = I_n$.

البرهان :

لتكن :

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

فأن :

$$A^* = \bar{A}^T = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{21} & \cdots & \bar{a}_{n1} \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} & \cdots & \bar{a}_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \bar{a}_{1n} & \bar{a}_{2n} & \cdots & \bar{a}_{nn} \end{pmatrix}$$

لنفرض الآن ، ان المصفوفة A هي مصفوفة احادية، فأن اشعة اعمدة المصفوفة A مجموعة معيارية متعامدة. فأنه لكل $i, j = 1, \ldots, n$ العنصر في السطر i والعمود j في المصفوفة A^*A هي :

$$x = \bar{a}_{1i} a_{1j} + \bar{a}_{2i} a_{2j} + \cdots + \bar{a}_{ni} a_{nj}$$

$$= \overline{a_{1i} \bar{a}_{1j} + a_{2i} \bar{a}_{2j} + \cdots + a_{ni} \bar{a}_{nj}} = \overline{c_i \circ c_j} = \begin{cases} 1 & \text{عندما } i = j \\ 0 & , i \neq j \end{cases}$$

فأن :

$$A^*A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = I_n$$

وبالعكس اذا كانت $A^*A = I_n$ فأنه مما سبق في

البرهان ينتج أن :

$$c_i \circ c_j = \begin{cases} 1 & \text{عندما } i=j \\ 0 & \text{عندما } i \neq j \end{cases}$$

فأن أشعة أعمدة A هي مجموعة معيارية متعامدة ، أي ان المصفوفة A أحادية .

(و. هـ. م.)

من هنا وبأستخدام نفس الطرق كما في النظرية (6 .5 .4) يبرهن بسهولة ان : المصفوفة الحيادية هي مصفوفة أحادية، والمصفوفة A احادية $\Leftrightarrow$ $A^* = A^{-1}$.
وحاصل ضرب مصفوفتين احاديتين هي مصفوفة أحادية.
ومحدد المصفوفة الأحادية هي ± 1 . لأنه مصفوفة عكوسة A إذا كانت A احادية ، فأن A^{-1} تكون ايضاً احادية .

13.6.4 نظرية

ليكن $(H_1, \circ)$ ، $(H_2, \circ')$ فضاءين هيرميتين ذي بعدين n . ولتكن $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ اساساً معيارياً متعامداً في H_1 ، $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ اساساً معيارياً متعامداً في H_2 . وليكن $f \in L(H_1, H_2)$ فأن :
f يكون احادياً $\Leftrightarrow$ المصفوفة المرافقة لـ f مصفوفة احادية .

البرهان :

لتكن $A = (a_{ij})$ المصفوفة المرافقة للتطبيق

الخطي f بالنسبة للأساسين المذكورين . وليكن o'' هو الضرب السلمي في $\mathbb{C}^n$ ، فإنه لكل i , j :

$$f(\varepsilon_i) = a_{1i}\beta_1 + \cdots + a_{ni}\beta_n$$

$$f(\varepsilon_j) = a_{1j}\beta_1 + \cdots + a_{nj}\beta_n$$

فأن :

$$f(\varepsilon_i) \, o' \, f(\varepsilon_j) = \left(\sum_{p=1}^{n} a_{pi}\beta_p\right) o' \left(\sum_{q=1}^{n} a_{qj}\beta_q\right)$$

$$= \sum_{p=1}^{n} a_{pi}\,\bar{a}_{pj}$$

وكذلك :

$$c_i \, o'' \, c_j = \sum_{p=1}^{n} a_{pi}\,\bar{a}_{pj}$$

اي ان :

$$f(\varepsilon_i) \, o' \, f(\varepsilon_j) = c_i \, o'' \, c_j$$

واذا كان f تطبيقاً احادياً فأنه لكل $i , j = 1, \ldots, n$:

$$c_i \, o'' \, c_j = f(\varepsilon_i) \, o' \, f(\varepsilon_j) = \varepsilon_i \circ \varepsilon_j = \begin{cases} 1 & \text{عندما } i = j \\ 0 & \text{عندما } i \neq j \end{cases}$$

فأن المجموعة $c_1 , \ldots , c_n$ مجموعة معيارية متعامدة اي ان المصفوفة A احادية .

ويبرهن العكس بأستخدام نفس الاسلوب السابق لاحظ النظرية (8 . 5 . 4) .

(و . هـ . م .)

14.6.4 نظرية

ليكن $(H_1, \circ)$ ، $(H_2, \circ')$ فضاءين هيرميتين ، وليكن $f \in L(H_1, H_2)$ فأنه يوجد $f^* \in L(H_2, H_1)$ وحيد بحيث انه لكل $v \in H_1$ ولكل $u \in H_2$: $f(v) \circ' u = v \circ f^*(u)$.

البرهان :

لتكن $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ اساساً معيارياً متعامداً في H_1 ، و $\{\beta_1, \dots, \beta_m\}$ اساساً معيارياً متعامداً في H_2 وليكن $f : H_1 \to H_2$ تطبيقاً خطياً ، $A = (a_{ij})$ المصفوفة المرافقة لـ f . فأنه لكل $v \in H_1$ ، $v = \lambda_1 \varepsilon_1 + \dots + \lambda_n \varepsilon_n$.

فأن :

$$f(v) = f(\lambda_1 \varepsilon_1 + \dots + \lambda_n \varepsilon_n) = (\lambda_1 a_{11} + \dots + \lambda_n a_{1n})\beta_1 + \dots + (\lambda_1 a_{m1} + \dots$$
$$\dots + \lambda_n a_{mn})\beta_m$$

ليكن $f^* : H_2 \to H_1$ معرفاً كمايلي :

$$\forall u \in H_2 \ , \ u = \gamma_1 \beta_1 + \dots + \gamma_m \beta_m \ ; \ f^*(u) = f^*(\gamma_1 \beta_1 + \dots + \gamma_m \beta_m)$$
$$= (\bar{a}_{11} \gamma_1 + \dots + \bar{a}_{m1} \gamma_m) \varepsilon_1 + \dots + (\bar{a}_{1n} \gamma_1 + \dots + \bar{a}_{mn} \gamma_m) \varepsilon_n$$

نفس الطريقة كما في النظرية (9.5.4) نبرهن أن f^* تطبيق خطي ، وأنه التطبيق الثنوي للتطبيق f .

(و . هـ . م .)

من برهان هذه النظرية وكما في النظرية (9.5.4) نستنتج أن : المصفوفة المرافقة للتطبيق f^* هي المصفوفة

$$\bar{A}^T = A^*$$

7.4 إيزومورفيزم الفضاءات الهيرميتية والأقليدية

في هذا البند سنذكر التعريف والنظريات بالنسبة للفضاءات الهيرميتية . ولتوضيح ان نفس التعريف والنظرية صحيحة بالنسبة للفضاءات الأقليدية سنكتب بين قوسين كلمة الأقليدي. وسنبرهن النظريات في حالة الفضاءات الهيرميتية وسنترك برهان حالة الفضاءات الأقليدية للقارئ .

1.7.4 تعريف

ليكن $(H_1, \circ)$ ، $(H_2, \acute{\circ})$ فضاءين هيرميتيين (أقليديين) . نقول ان التطبيق $\varphi : H_1 \to H_2$ هو ايزومورفيزم الفضاءات الهيرميتية (الأقليدية) اذا تحقق :-

(1) φ هو ايزومورفيزم الفضاءات الشعاعية .

(2) لكل $u, v \in H_1$ ، $\varphi(u) \acute{\circ} \varphi(v) = u \circ v$

ايزومورفيزم الفضاء الهيرميتي (الأقليدي) على نفسه نسميه اوتومورفيزماً .

2.7.4 نظرية

(1) التطبيق الحيادي لأي فضاء هيرميتي (أقليدي) هو ايزومورفيزم .

(2) تركيب ايزومورفيزمين للفضاءات الهيرميتية (الأقليدية) هو ايزومورفيزم فضاءات هيرميتية (اقليدية) .

(3) التطبيق العكسي لأيزومورفيزم فضاءات هيرميتية (اقليدية)

هو ايزومورفيزم فضاءات هيرميتية (اقليدية) .

البرهان :

(1) ليكن $(H, \circ)$ فضاءً هيرميتياً ، وليكن $Id_H : H \to H$ تطبيقاً حيادياً . واضح ان Id_H هو ايزومورفيزم فضاءات شعاعية .

لكل $u, v \in H$ ، $Id_H(u) \circ Id_H(v) = u \circ v$

وبذلك فأن Id_H هو ايزومورفيزم لفضاءات هيرميتية .

(2) ليكن $(H_1, \circ)$ ، $(H_2, \acute{\circ})$ ، $(H_3, \H{\circ})$ ثلاث فضاءات هيرميتية ، وليكن $f_1 : H_1 \to H_2$ ، $f_2 : H_2 \to H_3$ ايزومورفيزمين للفضاءات الهيرميتية . لنبرهن أن :

$f_3 = f_2 \circ f_1 : H_1 \longrightarrow H_3$ هو ايزومورفيزم فضاءات هيرميتية . بما ان تركيب تطبيقين خطيين هو تطبيق خطي ، وتركيب تقابلين هو تقابل ، فأن f_3 هو ايزومورفيزم فضاءات شعاعية .

لكل $u, v \in H_1$ فأن :

$$f_3(u) \H{\circ} f_3(v) = (f_2 \circ f_1)(u) \H{\circ} (f_2 \circ f_1)(v)$$

$$= f_2(f_1(u)) \H{\circ} f_2(f_1(v))$$

لكن بما ان $f_1(u) , f_1(v) \in H_2$ فأن :

$$f_3(u) \H{\circ} f_3(v) = f_1(u) \acute{\circ} f_1(v) = u \circ v$$

نبلك نستنتج ان $f_3 = f_2 \circ f_1$ هو ايزومورفيزم فضاءات هيرميتية .

(3) ليكن $(H_1, \circ)$ ، $(H_2, \acute{\circ})$ فضاءين هيرميتين ، وليكن $f: H_1 \to H_2$ ايزومورفيزم فضاءات هيرميتية ، فأن f هو ايزومورفيزم فضاءات شعاعية، كما برهنا سابقاً فأن $f^{-1}: H_2 \to H_1$ هو ايضاً ايزومورفيزم فضاءات شعاعية.

لكل $u_2, v_2 \in H_2$ يوجد $u_1, v_1 \in H_1$ بحيث :

$f(u_1) = u_2$ ، $f(v_1) = v_2$ فأن :

$$f^{-1}(u_2) \circ f^{-1}(v_2) = u_1 \circ v_1 = f(u_1) \acute{\circ} f(v_1) = u_2 \acute{\circ} v_2$$

لذلك فأن f^{-1} هو ايزومورفيزم فضاءات هيرميتية.

(و.هـ.م.)

نظرية 3.7.4

ليكن $(H_1, \circ)$ ، $(H_2, \acute{\circ})$ فضاءين هيرميتين (أقليديين) ، وليكن $\varphi: H_1 \to H_2$ تطبيقاً خطياً ولكي $\dim H_1 = n$ ، $\{v_1, \dots, v_n\}$ اساساً في H_1 . فأن φ هو ايزومورفيزم فضاءات هيرميتية (اقليدية) $\Longleftrightarrow$

(1) $\{\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n)\}$ اساساً للفضاء H_2 .

(2) $\varphi(v_i) \acute{\circ} \varphi(v_j) = v_i \circ v_j$ لكل $i, j = 1, \dots, n$.

البرهان :

لنفرض ان φ هو ايزومورفيزم فضاءات هيرميتية، فأن φ هو ايزومورفيزم فضاءات شعاعية وبذلك فأن $\varphi(H_1) = H_2$ ، فأن $\dim H_2 = n$ ، من هنا وحسب (2.3.2) فأن صورة اساس في H_1 هو اساس في H_2 .

ومنه (1) محقق.

من تعريف ايزومورفيزم الفضاءات الهيرميتية ينتج ان (2) محقق.

لنفرض الآن ان الشرطين (1) ، (2) محققتان.

من (1) ومن (2.3.2) فأن φ هو ايزومورفيزم فضاءات شعاعية.

لكل $x=\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ و $y=\sum_{j=1}^{n} \gamma_j v_j$ من H_1 ، فأن :

$$x \circ y = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right) \circ \left(\sum_{j=1}^{n} \gamma_j v_j\right) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \bar{\gamma}_j (v_i \circ v_j)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \bar{\gamma}_j \left(\varphi(v_i) \circ' \varphi(v_j)\right)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \left(\alpha_i \varphi(v_i)\right) \circ' \left(\gamma_j \varphi(v_j)\right)$$

$$= \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right) \circ' \varphi\left(\sum_{j=1}^{n} \gamma_j v_j\right)$$

$$= \varphi(x) \circ' \varphi(y)$$

وبذلك فأن φ هو ايزومورفيزم فضاءات هيرميتية.

(و. هـ. م.)

تمارين

(1) في الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^3$ على الحقل $\mathbb{R}$ لتكن :

$A = \{v_1 = (1,1,1) \ , \ v_2 = (1,1,-1) \ , \ v_3 = (1,-1,-1)\}$ اساسا في $\mathbb{R}^3$.

ليكن $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ تطبيقا معرفا كما يلي :

$$\forall x = (x_1, x_2, x_3) \ , \ y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ f(x,y) = x_1 y_1 + 2 x_2 y_2 + 3 x_3 y_3$$

هل ان f متماثل ؟ اوجد المصفوفة المرافقة لـ f .

(2) لتكن $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ المصفوفة المرافقة للشكل

مزدوج الخطية $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ في الاساس $A = \{v_1 = (1,2), v_2 = (2,1)\}$

اوجد المصفوفة المرافقة لهذا الشكل في الاساس

$B = \{u_1 = (4,-3), u_2 = (5,-3)\}$ ، ثم اوجد هل الشكل . هل ان

f متماثل ؟ اوجد الشكل المرافق لـ f في الاساس A.

(3) لتكن $A = \{e_1 = (1,0) \ , \ e_2 = (0,1)\}$ اساسا نظاميا في $\mathbb{R}^2$.

وليكن الشكل التربيعي φ معرفا على $\mathbb{R}^2$ كما يلي :

$$\forall \ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \quad ; \quad \varphi(x) = f(x,x) = 2x_1^2 - 3x_1x_2 + x_2^2$$

حيث x_i هي مركبات x في الاساس A .

اوجد المصفوفة المرافقة لهذا الشكل ، ثم اوجد المصفوفة

المرافقة لهذا الشكل في الاساس $B = \{v_1 = (1,1) \ , \ v_2 = (-2,3)\}$

ثم اكتب هذا الشكل في الأساس B .

(4) ليكن V فضاءاً شعاعياً على الحقل K ، و φ شكلاً تربيعياً على V ، f شكلاً مزدوج الخطية مرافقاً لـ φ . برهن انه لكل $x, y, z \in V$:

$$\varphi(x+y)+\varphi(x+z)+\varphi(y+z)-\varphi(x+y+z)=\varphi(x)+\varphi(y)+\varphi(z)$$

ثم برهن ان :

$$\varphi(x+y)+\varphi(x-y) = 2\varphi(x)+2\varphi(y)$$

و

$$\varphi(x+y)-\varphi(x-y) = 2f(x,y)+2f(y,x)$$

(5) بأستخدام طريقة لاكرانك اكتب الشكل التربيعي φ بالشكل القطري حيث φ معرف على $\mathbb{R}^3$ كمايلي :

$$\forall\, x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \,,\; \varphi(x)=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$$

حيث x_i هي مركبات الشعاع x في الاساس النظامي .

(6) بأستخدام طريقة جاكوبي اكتب الشكل التربيعي φ بالشكل القطري حيث φ معرف على $\mathbb{R}^3$ كمايلي :

$$\forall\, x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \;;\; \varphi(x)=2x_1^2+3x_1x_2+4x_1x_3+x_2^2+x_3^2$$

حيث x_i هي مركبات الشعاع x في الاساس النظامي .

(7) ليكن $(E,\circ)$ فضاءاً أقليدياً ، لكل $x, y \in E$ برهن ان :

$$\big|\,\|x\|-\|y\|\,\big| \le \|x-y\| \qquad (1)$$

$$x\circ y = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2-\|x\|^2-\|y\|^2\right) \qquad (2)$$

(8) ليكن $\mathbb{R}^2$ فضاءً شعاعياً على الحقل $\mathbb{R}$ ، ولتكن
$\circ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ معرفاً كما يلي :

$$x \circ y = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

حيث x_i هي مركبات الشعاع x ، y_i هي مركبات الشعاع y ، في الاساس النظامي .
برهن ان $\circ$ هو الضرب السلمي على $\mathbb{R}^2$. وبرهن ان الشعاع $(1,0)$ عمودي على الشعاع $(0,1)$ ، وان الشعاع $(1,1)$ عمودي على الشعاع $(-1,-1)$. ثم اوجد طول كل من هذه الأشعة .

(9) ليكن $(\mathbb{R}^3, \circ)$ فضاءً أقليدياً ، لكل $u, v \in \mathbb{R}^3$.
(a) بين انه اذا كان u متعامداً مع v ، فأن كل مضاعف عددي لـ u هو متعامد مع v .
(b) اذا كانت $v_1 = (1,1,2)$ ، $v_2 = (0,1,3)$ اوجد الشعاع v_3 بحيث يكون متعامداً مع v_1 و v_2 .
(c) اذا كانت $A = \{v_1 = (1,1,1), v_2 = (0,1,2), v_3 = (1,0,4)\}$ اساسا في $\mathbb{R}^3$ فأوجد اساس معياري متعامد في $\mathbb{R}^3$.

(10) ليكن $(E, \circ)$ فضاءً أقليدياً و E_1 فضاءً أقليدياً جزئياً في E .
(a) برهن ان $(E_1^{\perp})^{\perp} = E_1$
(b) اذا كان $E = \mathbb{R}^3$

و $E_1 = \{(x_1, x_2, 0) \; ; \; x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ (1) ، $E_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \; ; \; x_1 = x_3 \in \mathbb{R}\}$ (2)

اوجد $E_1^{\perp}$ في كل حالة . هل $E = E_1 \oplus E_1^{\perp}$ ؟

(c) ليكن $E = \mathbb{R}^4$ ولتكن :

$E_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \; ; \; x_2 = 0 \, , \, x_4 = x_1 + x_3\}$ اوجد اساس

معياري متعامد $A = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\}$ في E بحيث ان

$\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in E_1$ ، $\varepsilon_3, \varepsilon_4 \in E_1^{\perp}$.

(11) ليكن $(\mathbb{R}^2, o)$ فضاءً اقليدياً ، وليكن $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

تطبيقاً معرفاً كمايلي :-

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \, , \; f(x_1, x_2) = (x_1 \cos\theta - x_2 \sin\theta \, , \, x_1 \sin\theta + x_2 \cos\theta)$$

برهن ان f تطبيق عمودي ، ثم اوجد المصفوفة المرافقة

للتطبيق f بالنسبة للأساس النظامي .

(12) ليكن $(\mathbb{C}^2, o)$ فضاءً هرميتياً ، وليكن

$f, h : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ تطبيقين معرفين كالآتي :

$$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \, , \; f(z_1, z_2) = (2i z_1 \, , \, i z_2) \quad , \; h(z_1, z_2) = (z_1 \, , \, i z_2)$$

بين أياً من f ، h تطبيق احادي بالنسبة للأساس

النظامي في $\mathbb{C}^2$ ؟ . اوجد المصفوفة المرافقة لكل

من f ، h . اي من المصفوفتين احادية ؟ .

(13) ليكن (E_1, o) ، (E_2, o') فضاءين اقليديين

نسمي التطبيق $f : E_1 \to E_2$ ايزومتراً اذا كان :

$\forall x, y \in E_1 \quad , \quad d(f(x), f(y)) = d(x, y)$

اذا كان $F: E_1 \to E_2$ ايزومترا بحيث $F(0)=0$ ، برهن ان F تطبيق عمودي .

(14) ليكن $(\mathbb{C}^2, \circ)$ ، $(\mathbb{C}^3, \acute{\circ})$ فضاءين هيرميتين .
ولتكن $A = \{e_1, e_2\}$ ، $B = \{\acute{e}_1, \acute{e}_2, \acute{e}_3\}$ اساسين نظاميين في $\mathbb{C}^2$ ، $\mathbb{C}^3$ على التوالي .

(a) ليكن $f: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^3$ معرفاً كالآتي :
$f(x_1, x_2) = (x_1, x_2, x_1 + x_2)$ حيث x_i هي مركبات الشعاع x في الاساس النظامي ، اوجد التطبيق الثنوي للتطبيق f .

(b) ليكن $f: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ معرفاً كالآتي :
$f(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2 \,,\, x_1 + 2x_2)$ اوجد التطبيق الثنوي للتطبيق f .

(15) ليكن $(H, \circ)$ فضاءً هيرميتياً ، لكل $f_1, f_2 \in L(H,H)$ ولكل $k \in \mathbb{C}$ اذا كان f_1^* ، f_2^* التطبيقان الثنويان لـ f_1 ، f_2 على التوالي ، برهن ان :

(a) $I^* = I$ ، $f_0^* = f_0$.

(b) $(f_1 + f_2)^* = f_1^* + f_2^*$

(c) $(k f_1)^* = \bar{k} f_1^*$

(d) $(f_1 \circ f_2)^* = f_2^* \circ f_1^*$

(e) $(f_1^*)^* = f_1$

(f) إذا كان f_1 عكوساً فأن : $(f_1^{-1})^* = (f_1^*)^{-1}$.

(g) لكل $v \in H$ ، $f(v) = 0 \iff f^*(v) = 0$ و f أحادي

(16) ليكن H فضاءً شعاعياً على الحقل $\mathbb{R}$ ، $\circ$ ضرباً سلمياً في H . وليكن $f : H \to H$ تطبيقاً خطياً .

برهن أن $f = f_0$ إذا تحققت أي من الشروط التالية :

(a) لكل $u, v \in H$ ، $f(u) \circ v = 0$

(b) إذا كان $(H, \circ)$ فضاءً هيرميتياً فأن :
$f(u) \circ u = 0$ لكل $u \in H$.

(c) f ثنوي لنفسه و $f(u) \circ u = 0$ لكل $u \in H$.

ثم اعط مثالاً لتطبيق خطي f على فضاء اقليدي E بحيث يكون $f(u) \circ u = 0$ لكل $u \in E$ و $f \neq f_0$.

(17) ليكن $(H, \circ)$ فضاءً هيرميتياً ، وليكن f تطبيقاً خطياً على H .

برهن أن الشروط التالية متكافئة :

(a) f أحادي

(b) f يحافظ على حاصل الضرب السلمي .

(c) f يحافظ على الأطوال .

الفصل الخامس
الأشعة الذاتية والقيم الذاتية

1.5 مبادئ أولية

1.1.5 تعريف

ليكن V فضاءاً شعاعياً على الحقل K ، وليكن $f: V \to V$ تطبيقاً خطياً . نقول ان الشعاع $0 \neq v \in V$ هو شعاع ذاتي للتطبيق الخطي f اذا وجد $\lambda \in K$ بحيث $f(v) = \lambda v$.

نلاحظ ان $f(0) = 0 = \lambda . 0$ لكل $\lambda \in K$ ، لذلك فأننا في تعريف الشعاع الذاتي نشترط الأختلاف عن الصفر .

ونلاحظ انه لكل شعاع ذاتي v للتطبيق الخطي f ليوجد λ واحد فقط في K بحيث أن $f(v) = \lambda v$ ، لأنه اذا وجد $\lambda' \in K$ بحيث $f(v) = \lambda' v$ فأن $\lambda v = \lambda' v$ اي أن $(\lambda - \lambda') v = 0$ ، بما ان $v \neq 0$ فأن $\lambda = \lambda'$.

نقول ان λ هو قيمة ذاتية للتطبيق الخطي f اذا وجد $0 \neq v \in V$ بحيث ان $f(v) = \lambda v$ ، ونسمي عندئذ v شعاعاً ذاتياً مشاركاً للقيمة الذاتية λ ، كما ونسمي λ قيمة ذاتية مشاركة للشعاع الذاتي v .

نرمز لمجموعة الاشعة الذاتية المشاركة للقيمة الذاتية λ بالرمز V_λ .

5.1.2 نظرية

ليكن V فضاءً شعاعياً على الحقل K ، وليكن $f: V \to V$ تطبيقاً خطياً . إذا كان λ قيمة ذاتية للتطبيق الخطي f ، فأن المجموعة V_λ هي فضاء شعاعي جزئي من V.

البرهان :

V_λ ليست خالية لأنه يوجد على الأقل $v \in V$ واحد بحيث أن $f(v) = \lambda v$.

لكل $v_1, v_2 \in V_\lambda$ فأن $f(v_1) = \lambda v_1$ ، $f(v_2) = \lambda v_2$ فأن :

$$f(v_1 - v_2) = f(v_1) - f(v_2) = \lambda(v_1 - v_2)$$

فأن : $v_1 - v_2 \in V_\lambda$

لكل $\alpha \in K$ ، $f(\alpha v_1) = \alpha f(v_1)$

$$= \alpha(\lambda v_1) = \lambda(\alpha v_1)$$

فأن $\alpha v_1 \in V_\lambda$

وبذلك فأن V_λ هو فضاء شعاعي جزئي في V .

(و. هـ . م .)

5.1.3 تعريف

ليكن V فضاءً شعاعياً على الحقل K ، وليكن $f: V \to V$ تطبيقاً خطياً ، λ قيمة ذاتية مشاركة للتطبيق الخطي f . نسمي الفضاء الشعاعي الجزئي V_λ فضاءً شعاعياً جزئياً ذاتياً مشاركاً للقيمة الذاتية λ .

4.1.5 نظرية

ليكن V فضاءاً شعاعياً على الحقل K ، ولتكن $\{v_1, \dots, v_n\}$ اساساً في V ، وليكن $f : V \to V$ تطبيقاً خطياً ، $A = (a_{ij})$ المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي f . ليكن $\lambda \in K$ فأن :

(1) λ قيمة ذاتية للتطبيق f $\Leftrightarrow$ $\det(A - \lambda I_n) = 0$

(2) $\det(A - \lambda I_n)$ لا يعتمد على اختيار الأساس.

البرهان :

(1) ليكن λ قيمة ذاتية للتطبيق f ، فأنه يوجد $0 \neq v \in V$ بحيث أن $f(v) = \lambda v$ اي ان $f(v) = \lambda\, Id_V(v)$ فأن :

$$(f - \lambda\, Id_V)(v) = f(v) - \lambda\, Id_V(v) = 0$$

أي أن : $0 \neq v \in Ker(f - \lambda Id_V)$ ، ومنه فأن $(f - \lambda Id_V)$ ليس متباين ، وبذلك فأن $f - \lambda Id_V$ ليس تقابل .

من هنا فأن المصفوفة المرافقة للتطبيق $f - \lambda Id_V$ والتي هي $A - \lambda I_n$ غير عكوسة ، فأن $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

وبالعكس واذا كان $\det(A - \lambda I_n) = 0$ نستنتج ان التطبيق $f - \lambda Id_V$ ليس تقابل . حسب النظرية (7 . 3 . 2) فأن $f - \lambda Id_V$ ليس متباين ، وبذلك فأن $\ker(f - \lambda Id_V) \neq \{0\}$ اي انه يوجد $0 \neq v \in Ker(f - \lambda Id_V)$. من هنا فأن :

$$(f - \lambda\, Id_V)(v) = 0$$

وبذلك $f(v) = \lambda v$ اي ان λ هو قيمة ذاتية للتطبيق f.

(2) لتكن $\{u_1, \dots, u_n\}$ اساساً اخراً للفضاء V.

ولتكن P مصفوفة العبور من الاساس $\{v_1, \dots, v_n\}$ الى الاساس $\{u_1, \dots, u_n\}$. ولتكن المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي f من الاساس $\{u_1, \dots, u_n\}$ هي B. فانه حسبما برهنا في (3.7.3 فرع (5)) فان: $B = P^{-1} A P$.

فان:

$$\det(B - \lambda I_n) = \det(P^{-1}AP - \lambda I_n) = \det(P^{-1}AP - \lambda P^{-1} I_n P)$$

$$= \det(P^{-1}(A - \lambda I_n) P) = \det(P^{-1}) \det(A - \lambda I_n) . \det(P)$$

$$= \det(A - \lambda I_n)$$

(و.هـ.م.)

من برهان هذه النظرية نستنتج :

5.1.5 نتيجة

(1) λ قيمة ذاتية للتطبيق $f \iff$ التطبيق $(f - \lambda Id_V)$ غير متباين .

(2) $V_\lambda = Ker(f - \lambda Id_V)$.

6.1.5 تعريف

ليكن V فضاءاً شعاعياً ذا بعد n على الحقل K، وليكن $f : V \to V$ تطبيقاً خطياً ، ولتكن $\{v_1, \dots, v_n\}$ اساساً في V ، $A = (a_{ij})$ المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي f ، x شعاعاً ذاتياً مشاركاً للقيمة الذاتية λ.

فان : $x = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$ حيث $x_i \in K$.

من هنا ينتج أن :

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i\right)$$
$$= x_1 f(v_1) + \cdots + x_n f(v_n)$$
$$= x_1(a_{11} v_1 + \cdots + a_{n1} v_n) + \cdots + x_n(a_{1n} v_1 + \cdots + a_{nn} v_n)$$
$$= (x_1 a_{11} + \cdots + x_n a_{1n}) v_1 + \cdots + (x_1 a_{n1} + \cdots + x_n a_{nn}) v_n$$

من جهة اخرى فأن :

$$f(x) = \lambda x = \lambda(x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n)$$
$$= (\lambda x_1) v_1 + \cdots + (\lambda x_n) v_n$$

فأن :

$$(\lambda x_1) v_1 + \cdots + (\lambda x_n) v_n = (x_1 a_{11} + \cdots + x_n a_{1n}) v_1 + \cdots + (x_1 a_{n1} + \cdots + x_n a_{nn}) v_n$$

لكن الاشعة $\{v_1, \ldots, v_n\}$ هي اساس للفضاء V ، فأن :

$$\lambda x_1 = x_1 a_{11} + \cdots + x_n a_{1n}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\lambda x_n = x_1 a_{n1} + \cdots + x_n a_{nn} \quad .$$

من هنا فأن :

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

فأن :

$$(A - \lambda I_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

نسمي $\det(A - \lambda I_n)$ بكثيرة الحدود المميز للتطبيق f .
بما أنه لكل مصفوفة $A \in M_n(K)$ يوجد تطبيق خطي f لفضاء شعاعي ذات بعد n ، فأننا نقصد

بالقيم الذاتية والأشعة الذاتية للمصفوفة A ، القيم الذاتية والأشعة الذاتية للتطبيق الخطي f المرافق للمصفوفة A .

لإيجاد القيم الذاتية والأشعة الذاتية المشاركة للتطبيق الخطي f نتبع مايلي :

اذا فرضنا ان λ قيمة ذاتية للتطبيق f فانه :

$$\det(A-\lambda I_n)=\det\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}\right)$$

$$=\det\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}$$

عند حساب $\det(A-\lambda I_n)$ نحصل على كثيرة حدود في λ ذي الحوامل من الحقل K ، وحدها الاعلى درجة هو ناتج جداء الحدود الواقعة على القطر الرئيسي .

فيكون :

$$\det(A-\lambda I_n)=(-1)^n\lambda^n+P_1\lambda^{n-1}+\cdots+P_{n-1}\lambda+P_n$$

نرمز لكثيرة الحدود هذه بالرمز $g(\lambda)$.

نقول ان $g(\lambda)$ هي كثيرة الحدود المميز للتطبيق f (أو كثيرة الحدود المميز للمصفوفة A) .

ونسمي المعادلة $g(\lambda)=\det(A-\lambda I_n)=0$ بالمعادلة المميزة للتطبيق f (أو المعادلة المميزة للمصفوفة A) .

بإيجاد حلول هذه المعادلة نوجد القيم الذاتية المشاركة للتطبيق f ، ومنها نوجد الاشعة الذاتية المشاركة لتلك القيم الذاتية .

نلاحظ هنا ، انه اذا كانت المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي f مصفوفة مثلثية علوية (سفلية) ، فأن كثيرة الحدود المميز للتطبيق f تكون :

$$g(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \cdots (a_{nn} - \lambda)$$

حيث a_{ii} هي عناصر القطر الرئيسي . فأن a_{ii} هي القيم الذاتية للتطبيق f .

وكذلك نلاحظ انه اذا كانت كثيرة الحدود المميز للمصفوفة A هي حاصل ضرب n كثيرات حدود خطية (من الدرجة الاولى) فأنه يوجد n قيم ذاتية .

مثال 7.1.5

ليكن $\mathbb{R}^3$ فضاءاً شعاعياً على الحقل $\mathbb{R}$. لنأخذ $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ تطبيقاً خطياً معرفاً كمايلي :

$$\forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2 - x_3, x_3)$$

فأن المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي f في الاساس النظامي هي :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

فأن كثيرة الحدود المميز للتطبيق f هي :

$$g(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^3$$

عندما $g(\lambda) = 0$ فأن $(1-\lambda)^3 = 0$

فأن : $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$

فأن الاشعة الذاتية $x = (x_1, x_2, x_3)$ المشاركة للقيم الذاتية $\lambda = 1$ يحقق :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

من هنا فأن $x_3 = 0$ اي ان :

$$x = (x_1, x_2, 0) = x_1(1,0,0) + x_2(0,1,0)$$

فأن الفضاء الشعاعي الجزئي الذاتي المشارك للقيمة الذاتية $\lambda = 1$ هو : $V_{\lambda=1} = [(1,0,0), (0,1,0)]$.

2.5 تقطير المصفوفة

في (2.1.3) عرفنا المصفوفة القطرية ، بأنها المصفوفة التي تكون جميع عناصرها أصفاراً عدا عناصر القطر الرئيسي. سندرس في هذا البند كيفية الحصول من اي مصفوفة A على مصفوفة قطرية ، ونسمي العملية هذه بتقطير المصفوفة.

1.2.5 نظرية

ليكن V فضاءاً شعاعياً على الحقل K ، f تطبيقاً

خطياً من V في V ، ولتكن $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ قيم ذاتية مختلفة للتطبيق f ، و $x_1,\dots,x_n$ اشعة ذاتية مشاركة لتلك القيم الذاتية على التوالي . فأن الاشعة $x_1,\dots,x_n$ مستقلة خطياً.

البرهان :

إذا كان $n=1$ ولما كان $x_1\neq 0$ لأنه شعاع ذاتي ، فأن x_1 مستقلة خطياً .

لنفرض الآن ان النظرية صحيحة من اجل $x_1,\dots,x_{n-1}$ اشعة ذاتية مشاركة للقيم الذاتية المختلفة $\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1}$. وليكن λ_n قيمة ذاتية للتطبيق f مختلفاً عن كل من $\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1}$ ، وليكن x_n شعاعاً ذاتياً مشاركاً للقيمة الذاتية λ_n.

لأجل $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in K$ إذا كان :

$$\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\dots+\alpha_{n-1}x_{n-1}+\alpha_n x_n=0$$

فأنه إذا كان $\alpha_n=0$ فأن $\alpha_1 x_1+\dots+\alpha_{n-1}x_{n-1}=0$

من الفرضية فأن : $\alpha_1=0,\dots,\alpha_{n-1}=0$

فأن : $\alpha_1=0,\dots,\alpha_{n-1}=0\ ,\ \alpha_n=0$

اي ان الاشعة $x_1,\dots,x_n$ مستقلة خطياً .

إذا كان $\alpha_n\neq 0$ فأن :

$$x_n=\gamma_1 x_1+\dots+\gamma_{n-1}x_{n-1}$$

حيث $\gamma_i=\dfrac{-\alpha_i}{\alpha_n}$

وبما ان x_n هو شعاع ذاتي مشارك للقيمة الذاتية λ_n

فأن : $f(x_n)=\lambda_n x_n$.

اي ان :

$$f(x_n) = \lambda_n \gamma_1 x_1 + \cdots + \lambda_n \gamma_{n-1} x_{n-1}$$

من جهة اخرى بما ان f خطي فان :

$$f(x_n) = f(\gamma_1 x_1 + \cdots + \gamma_{n-1} x_{n-1})$$
$$= \gamma_1 f(x_1) + \cdots + \gamma_{n-1} f(x_{n-1})$$
$$= \gamma_1 \lambda_1 x_1 + \cdots + \gamma_{n-1} \lambda_{n-1} x_{n-1}$$

فأن :

$$\lambda_n \gamma_1 x_1 + \cdots + \lambda_n \gamma_{n-1} x_{n-1} = \gamma_1 \lambda_1 x_1 + \cdots + \gamma_{n-1} \lambda_{n-1} x_{n-1}$$

اي ان :

$$\gamma_1 (\lambda_n - \lambda_1) x_1 + \cdots + \gamma_{n-1} (\lambda_n - \lambda_{n-1}) x_{n-1} = 0$$

وبما ان الاشعة $x_1, \ldots, x_{n-1}$ مستقلة خطياً حسب الفرض

فأن :

$$\gamma_1 (\lambda_n - \lambda_1) = 0 \;, \ldots , \; \gamma_{n-1} (\lambda_n - \lambda_{n-1}) = 0$$

وبما ان λ_i مختلفة، فأن $\lambda_n - \lambda_i \neq 0$ لكل $i = 1, \ldots, n-1$

فأن $\gamma_1 = 0 , \ldots , \gamma_{n-1} = 0$ اي ان $x_n = 0$.

وهذا خلاف للفرض ان $x_n \neq 0$ لأنه شعاع ذاتي،

فأن $\alpha_n = 0$ وبالتالي الاشعة $x_1, \ldots, x_n$ مستقلة خطياً.

(و. هـ. م.)

2.2.5 نظرية

ليكن V فضاءً شعاعياً ذا بعد n على الحقل K،
وليكن f تطبيقاً خطياً من V في V ، فإذا كان
للتطبيق f ، n اشعة ذاتية مختلفة ، وإذا اعتبرنا

هذه الاشعة اساساً للفضاء V ، فأن المصفوفة المرافقة للتطبيق f من هذا الاساس هي مصفوفة قطرية. وبالعكس واذا كانت المصفوفة المرافقة للتطبيق f من اساس معين هي مصفوفة قطرية فأن جميع اشعة تلك الاساس هي اشعة ذاتية للتطبيق f .

البرهان :

لتكن $v_1, \ldots, v_n$ اشعة ذاتية مختلفة للتطبيق f ذي القيم الذاتية المختلفة $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ على الترتيب ، فأن $f(v_i) = \lambda_i v_i$ لكل $i = 1, \ldots, n$.

حسب النظرية (1.2.5) فأن الاشعة $v_1, \ldots, v_n$ مستقلة خطياً ، فأنها اساس للفضاء V .

وكذلك بما ان $v_1, \ldots, v_n$ اشعة ذاتية فأن :

$$f(v_1) = \lambda_1 v_1 = \lambda_1 v_1 + 0 \cdot v_2 + \cdots + 0 \cdot v_n$$

$$f(v_2) = \lambda_2 v_2 = 0 \cdot v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + 0 \cdot v_n$$

- - - - - - - - - - - - - - - - -

$$f(v_n) = \lambda_n v_n = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \cdots + \lambda_n v_n$$

فأن المصفوفة المرافقة للتطبيق f في الاساس $\{v_1, \ldots, v_n\}$ هي :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

وهي مصفوفة قطرية .

وبالعكس، إذا كانت المصفوفة المرافقة للتطبيق f في الأساس $\{v_1, \dots, v_n\}$ هي :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

فإن :

$$f(v_1) = a_{11} v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_n$$

$$f(v_2) = 0 \cdot v_1 + a_{22} \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_n$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$f(v_n) = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + a_{nn} v_n$$

فأن $f(v_i) = a_{ii} \cdot v_i$ لكل $i = 1, \dots, n$ ، حيث $a_{ii} \in K$.

فأن الأشعة $v_1, \dots, v_n$ هي أشعة ذاتية للتطبيق f.

(و. هـ. م.)

3.2.5 نظرية

ليكن V فضاء شعاعياً ذا بعد n على الحقل K ، ولتكن $\{v_1, \dots, v_n\}$ أساساً في V . وليكن f تطبيقاً خطياً من V في V . فإذا كان لكثيرة الحدود المميز للتطبيق f ، n قيم ذاتية مختلفة $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ، فإنه توجد أساس $\{u_1, \dots, u_n\}$ للفضاء V بحيث أن المصفوفة المرافقة للتطبيق f في الأساس $\{u_1, \dots, u_n\}$ هي مصفوفة قطرية • وعناصر القطر هي القيم الذاتية للتطبيق f.

البرهان :

لكل قيمة ذاتية λ_i يوجد على الأقل شعاع ذاتي

u_i لكل $i = 1, \dots, n$.

بما ان $\lambda_i \neq \lambda_j$ لكل $i \neq j$ فأنه حسب النظرية (1.2.5) الاشعة $u_1, \dots, u_n$ مستقلة خطياً ، وبما ان عددها هو n ، فأن الاشعة $\{u_1, \dots, u_n\}$ هي اساس للفضاء V .

فأنه حسب النظرية (2.2.5) المصفوفة B المرافقة للتطبيق الخطي f في الاساس $\{u_1, \dots, u_n\}$ هي مصفوفة قطرية ، بحيث ان عناصر القطر تكون هي القيم الذاتية المختلفة λ_i .

(و. هـ. م.)

4.2.5 نتيجة

بنفس فرضيات النظرية (3.2.5) ، واذا كانت المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي f في الاساس $\{v_1, \dots, v_n\}$ هي A ، ومصفوفة العبور من الاساس $\{v_1, \dots, v_n\}$ الى الاساس $\{u_1, \dots, u_n\}$ هي P ، فأن العلاقة بين المصفوفة A ، B هي :

$$B = P^{-1} A P$$

5.2.5 مثال

نأخذ الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^3$ على الحقل $\mathbb{R}$ وأساسه النظامي $\{e_1, e_2, e_3\}$. وليكن $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ تطبيقاً خطياً معرفاً كمايلي :

$$\forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \quad ; \quad f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3 \,,\, 5x_2 + 3x_3 \,,\, -2x_1 + 4x_3)$$

فأن المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي f في الاساس

هي $\{e_1, e_2, e_3\}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

فأن :

$$\det(A - \lambda I_3) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 5-\lambda & 3 \\ -2 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

فأن المعادلة المميزة للتطبيق f هي $\det(A - \lambda I_3) = 0$

اي ان : $(1-\lambda)(5-\lambda)(4-\lambda) + 2(5-\lambda) = 0$

فأن : $(5-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) = 0$

اي ان : $\lambda_1 = 5$ ، $\lambda_2 = 2$ ، $\lambda_3 = 3$ هي قيم ذاتيه للتطبيق f .

فأن الاشعة الذاتيه $x = (x_1, x_2, x_3)$ المشاركة للقيمة الذاتيه $\lambda_1 = 5$ هي :

$$\begin{pmatrix} 1-5 & 0 & 1 \\ 0 & 5-5 & 3 \\ -2 & 0 & 4-5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

من هنا فأن $x_1 = 0$ ، $x_3 = 0$ اي ان :

$$x = (0, x_2, 0) = x_2(0, 1, 0)$$

فأن : $V_{\lambda_1=5} = [(0,1,0)]$

بنفس الطريقة الاشعة الذاتيه $x = (x_1, x_2, x_3)$ المشاركة للقيمة الذاتيه $\lambda_2 = 2$ هي :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

فأن : $x_1 = x_3$ ، $x_2 = -x_1$

اي ان : $x = (x_1, -x_1, x_1)$

$= x_1(1, -1, 1)$

فأن : $V_{\lambda_2=2} = [(1,-1,1)]$

بنفس الطريقة الاشعة الذاتية $x = (x_1, x_2, x_3)$ المشاركة للقيمة الذاتية $\lambda_3 = 3$ هي :

$$x = \left(\frac{1}{2}x_3, \frac{-3}{2}x_3, x_3\right) = \frac{1}{2}x_3(1, -3, 2)$$

فأن : $V_{\lambda_3=3} = [(1,-3,2)]$

فأن الاشعة الذاتية المشاركة للقيم الذاتية 5 ، 2 ، 3 هي $v_1 = (0,1,0)$ ، $v_2 = (1,-1,1)$ ، $v_3 = (1,-3,2)$. على الترتيب . نلاحظ ان v_1, v_2, v_3 مستقلة خطياً فهي اساس للفضاء $\mathbb{R}^3$.

كذلك ،

$$v_1 = (0,1,0) = 0.e_1 + 1.e_2 + 0.e_3$$

$$v_2 = (1,-1,1) = 1.e_1 + (-1)e_2 + 1.e_3$$

$$v_3 = (1,-3,2) = 1.e_1 + (-3)e_2 + 2.e_3$$

فأن مصفوفة العبور من الاساس $\{e_1, e_2, e_3\}$ الى الأساس $\{v_1, v_2, v_3\}$ هي :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

والمصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي f هي :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

فأن المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي f في الأساس $\{v_1, v_2, v_3\}$ هي :

$$D = P^{-1} A P = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

نلاحظ ان D هي مصفوفة قطرية وعناصر قطرها هي القيم الذاتية 5 ، 2 ، 3 .
وهو نفس الجواب فيما لو استعملنا النظرية (3.2.5) مباشرة .

3 . 5 نظرية كايلي ـ هاملتون

1 . 3 . 5 نظرية .

لتكن $A \in M_n(K)$ ، $g(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n$ كثيرة حدود في λ ذي العوامل من الحقل K . ولتكن :
$C(\lambda) = C_0\lambda^{n-1} + C_1\lambda^{n-2} + \dots + C_{n-1}$ كثيرة حدود من الدرجة $(n-1)$ وعوامله هي المصفوفات C_i و $C_i \in M_n(K)$
فاذا كان : $g(\lambda) I_n = (A - \lambda I_n)\, C(\lambda)$
فأن : $g(A) = 0$

البرهان :

$$(A - \lambda I_n)\, C(\lambda) = (A - \lambda I_n)(C_0\lambda^{n-1} + C_1\lambda^{n-2} + \dots + C_{n-2}\lambda + C_{n-1})$$

$$= A C_0\lambda^{n-1} + A C_1\lambda^{n-2} + \dots + A C_{n-2}\lambda + A C_{n-1} - C_0\lambda^n - C_1\lambda^{n-1} - \dots - C_{n-2}\lambda^2 - C_{n-1}\lambda$$

$$= AC_{n-1} + (AC_{n-2} - C_{n-1})\lambda + (AC_{n-3} - C_{n-2})\lambda^2 + \cdots + (AC_0 - C_1)\lambda^{n-1} - C_0\lambda^n$$

من هنا فأن :

$$AC_{n-1} + (AC_{n-2} - C_{n-1})\lambda + (AC_{n-3} - C_{n-2})\lambda^2 + \cdots + (AC_0 - C_1)\lambda^{n-1} - C_0\lambda^n =$$
$$= a_n I_n + a_{n-1}\lambda I_n + a_{n-2}\lambda^2 I_n + \cdots + a_1\lambda^{n-1} I_n + a_0\lambda^n I_n$$

فأن :

$$AC_{n-1} = a_n I_n$$
$$AC_{n-2} - C_{n-1} = a_{n-1} I_n$$
$$AC_{n-3} - C_{n-2} = a_{n-2} I_n$$
$$\text{-------------}$$
$$AC_0 - C_1 = a_1 I_n$$
$$-C_0 = a_0 I_n$$

نضرب المعادلة الثانية ب A والثالثة ب A^2 .... والاخيرة ب A^n ونجمعها ، فيكون لدينا :

$$a_n I_n + a_{n-1} A + \cdots + a_0 A^n = 0$$

اي ان $g(A) = 0$

(و . هـ . م .)

2.3.5 نظرية (كايلي-هاملتون) .

لتكن $A \in M_n(K)$ و $g(\lambda)$ كثيرة الحدود المميز للمصفوفة A . فأن $g(A) = 0$.

البرهان :

نلاحظ ان $adj(A - \lambda I_n)$ هي كثيرة حدود في λ ذات درجة ليست اكبر من $(n-1)$. لنفرض ان $adj(A - \lambda I_n) = C(\lambda)$.

حسب التمرين (16) في الفصل الثالث، فأن:

$$(\det(A-\lambda I_n))I_n = (A-\lambda I_n)(\operatorname{adj}(A-\lambda I_n))$$

اي ان:

$$g(\lambda)\, I_n = (A-\lambda I_n)\, C(\lambda)$$

فأنه حسب النظرية (1.3.5)، $g(A)=0$.

(و.هـ.م.)

3.3.5 تعريف

لتكن $A \in M_n(K)$ ، نسمي كثيرة الحدود $h(\lambda)$ أدنى كثيرة حدود للمصفوفة A ، إذا كان العامل عند الحد ذي اعلى درجة في $h(\lambda)$ هو 1 ، وكذلك $h(\lambda)$ هي كثيرة حدود ذات اقل درجة ممكنة بحيث تكون A جذراً لها .

4.3.5 نظرية

لتكن $A \in M_n(K)$. $h(\lambda)$ ادنى كثيرة حدود للمصفوفة A . فأن كل كثيرة حدود والتي تكون A جذراً لها تقبل القسمة على $h(\lambda)$.

البرهان:

لتكن $f(\lambda)$ كثيرة حدود بحيث A تكون جذراً لها ، فأنه لكثيرتي الحدود $h(\lambda)$ ، $f(\lambda)$ توجد كثيرتي الحدود $r(\lambda)$ ، $q(\lambda)$ بحيث $f(\lambda)=h(\lambda)q(\lambda)+r(\lambda)$ حيث $r(\lambda)=0$ أو درجة $r(\lambda)$ اقل من درجة $h(\lambda)$.

إذا كانت $r(\lambda)\neq 0$ فأن : $f(A)=h(A)q(A)+r(A)$

لكن $f(A)=0$ ، $h(A)=0$ فأن $r(A)=0$ ، اي ان

A هي جذر لكثيرة الحدود $r(\lambda)$ ذات الدرجة اقل من درجة

$h(\lambda)$ ، وهذا غير ممكن لأن $h(\lambda)$ هي ادنى كثيرة حدود

للمصفوفة A ، فأن $r(\lambda)=0$.

اي ان $f(\lambda)=h(\lambda)q(\lambda)$ ، اي ان $f(\lambda)$ تقبل

القسمة على $h(\lambda)$.

(و. هـ. م.)

5.3.5 نتيجة

لأية مصفوفة $A\in M_n(K)$ ، فأن كثيرة الحدود

المميز للمصفوفة A تقبل القسمة على كثيرة الحدود

الدنيا للمصفوفة A .

4.5 الأشعة الذاتية والتطبيقات العمودية والأحادية.

1.4.5 نظرية

ليكن V فضاءاً شعاعياً ذا بعد n على الحقل

K ، وليكن f شكلاً مزدوج الخطية ومتماثلاً على V ،

فأنه يوجد اساس في V بحيث تكون المصفوفة

المرافقة للتطبيق f بالنسبة لهذا الاساس مصفوفة قطرية .

البرهان :

إذا كان f تطبيقاً صفرياً فأن النظرية صحيحة .

واذا كان $\dim V = 1$ فأن النظرية ايضاً صحيحة .

لنفرض ان $f \neq f_0$ وان $\dim V = n > 1$ ، ولنفرض ان النظرية صحيحة من اجل فضاء شعاعي ذي بعد $n-1$.

ليكن $v_1 \in V$ بحيث $f(v_1, v_1) \neq 0$.

وليكن U الفضاء الشعاعي الجزئي المولد بالشعاع v_1 ، ولتكن $W = \{v \in V : f(v_1, v) = 0\}$. لكل $u \in U \cap W$ فأن $u \in U$ و $u \in W$ ، فأن $u = k_1 v_1$ حيث $k_1 \in K$ ، فأن :

$$0 = f(u, u) = f(k_1 v_1, k_1 v_1) = k_1^2 f(v_1, v_1)$$

لكن $f(v_1, v_1) \neq 0$ فأن $k_1 = 0$ وبالتالي $u = k_1 v_1 = 0$

فأن $U \cap W = \{0\}$.

لكل $v \in V$ نضع

$$\omega = v - \frac{f(v_1, v)}{f(v_1, v_1)} v_1$$

فأن :

$$f(v_1, \omega) = f(v_1, v) - \frac{f(v_1, v)}{f(v_1, v_1)} f(v_1, v_1) .$$

$$= f(v_1, v) - f(v_1, v) = 0$$

فأنه من تعريف W فأن $\omega \in W$ ، وكذلك $\frac{f(v_1, v)}{f(v_1, v_1)} \in K$

وبذلك فأن :

$$v = \omega + \frac{f(v_1, v)}{f(v_1, v_1)} v_1 \in W + U$$

اي ان :

$$V = W + U$$

فأن :

$$V = W \oplus U$$

فأنه حسب النظرية (10 . 5 . 1) $\dim V = \dim W + \dim U$

بما ان v_1 يولد U فأن : $\dim U = 1$ فأن : $\dim W = n - 1$

فأنه حسب الفرض يوجد أساس للفضاء W ولتكن $\{v_2, v_3, \ldots, v_n\}$، بحيث المصفوفة المرافقة للتطبيق f من W في W من الأساس $\{v_2, \ldots, v_n\}$ تكون قطرية، أي انه $f(v_i, v_j) = 0$ لكل $i \neq j$ ، $i, j = 2, 3, \ldots, n$.

بما ان $\{v_1\}$ أساس للفضاء U ، $V = W \oplus U$، فأنه حسب التمرين (19 في الفصل الاول) تكون $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ أساساً للفضاء الشعاعي V ، وكذلك $f(v_1, v_i) = 0$ لكل $i = 2, \ldots, n$ ، فأن $f(v_i, v_j) = 0$ لكل $i \neq j$ ، $i, j = 1, \ldots, n$ ، وبذلك فأن المصفوفة المرافقة للتطبيق f من الأساس $\{v_1, \ldots, v_n\}$ تكون مصفوفة قطرية.

(و.هـ.م.)

2.4.5 نظرية

ليكن (H, o) فضاءاً هيرميتياً ، f تطبيقاً خطياً على H ، وليكن λ قيمة ذاتية للتطبيق الخطي f فأن :-

(1) إذا كان $f^* = f^{-1}$ فأن $|\lambda| = 1$.

(2) إذا كان $f^* = f$ فأن λ قيمة حقيقية بحتة.

(3) إذا كان $f^* = -f$ فأن λ قيمة تخيلية بحتة.

البرهان :

بما ان λ قيمة ذاتية للتطبيق f، فأنه يوجد $0 \neq v \in H$ بحيث $f(v) = \lambda v$ ، من هنا فأن $v o v \neq 0$.

(1) :- $\lambda \bar{\lambda}(v o v) = (\lambda v o \lambda v) = (f(v) o f(v)) = v o f^*(f(v))$

$= v \circ f^{-1}(f(v)) = v \circ v$

فأن : $(\lambda\bar{\lambda} - 1)(v \circ v) = 0$

لكن $v \circ v \neq 0$ فأن : $\lambda\bar{\lambda} - 1 = 0$ اي ان : $\lambda\bar{\lambda} = 1$

فأن : $|\lambda| = 1$.

(2) $\lambda(v \circ v) = \lambda v \circ v = f(v) \circ v = v \circ f^*(v)$

$= v \circ f(v) = v \circ \lambda v = \bar{\lambda}(v \circ v)$

فأن : $(\lambda - \bar{\lambda})(v \circ v) = 0$

لكن $v \circ v \neq 0$ فأن : $\lambda - \bar{\lambda} = 0$ ، اي ان $\lambda = \bar{\lambda}$

وبذلك فأن λ قيمة حقيقية بحتة .

(3) $\lambda(v \circ v) = \lambda v \circ v = f(v) \circ v = v \circ f^*(v)$

$= v \circ (-f(v)) = v \circ (-\lambda v) = -\bar{\lambda}(v \circ v)$

فأن : $(\lambda + \bar{\lambda})(v \circ v) = 0$

لكن $v \circ v \neq 0$ ، فأن $\lambda + \bar{\lambda} = 0$ ، اي ان $\bar{\lambda} = -\lambda$

ومنه λ قيمة تخيلية بحتة .

(و . هـ . م)

3 . 4 . 5 نتيجة

اذا كان $(E, \circ)$ فضاءاً اقليدياً ، f تطبيقاً خطياً على E بحيث $f = f^*$ فأن :

(1) اذا كان λ قيمة ذاتية للتطبيق f ، فأن λ قيمة حقيقية بحتة .

(2) كثيرة الحدود المميز $g(\lambda)$ للتطبيق f هي حاصل ضرب كثيرات حدود خطية .

(3) توجد اشعة ذاتية للتطبيق f .

(4) الاشعة الذاتية المشاركة للقيم الذاتية المختلفة متعامدة .

البرهان :

(1) مباشرة حسب النظرية السابقة من (2) .

(2) حسب (1) فأن القيم الذاتية للتطبيق f تكون حقيقية بحتة ، اي ان كثيرة الحدود المميز $g(\lambda)$ هي حاصل ضرب كثيرات حدود خطية .

(3) من (2) مباشرة .

(4) لنفرض ان λ_1, λ_2 قيمتان ذاتيتان مختلفتان للتطبيق f ، ولنفرض ان v_1, v_2 شعاعان ذاتيان مشاركان لهما على التوالي ، فأن $f(v_1)=\lambda_1 v_1$ ، $f(v_2)=\lambda_2 v_2$ وحيث ان $f=f^*$ فأن :

$$\lambda_1(v_1 \circ v_2) = \lambda_1 v_1 \circ v_2 = f(v_1) \circ v_2 = v_1 \circ f^*(v_2) = v_1 \circ f(v_2)$$

$$= v_1 \circ \lambda_2 v_2 = \lambda_2 (v_1 \circ v_2)$$

فأن :

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(v_1 \circ v_2) = 0$$

لكن $\lambda_1 \neq \lambda_2$ فأن $v_1 \circ v_2 = 0$ ، ومنه فأن v_1 ، v_2 متعامدان .

(و . هـ . م .)

4.4.5 نظرية

ليكن $(E, \circ)$ فضاءاً أقليدياً ، f تطبيقاً خطياً على E بحيث $f=f^*$. فأنه عندئذ توجد اساس معياري

متعامد للفضاء E متكون من الاشعة الذاتية للتطبيق f .

البرهان :

اذا كان $\dim E=1$ فأن النظرية صحيحة .

لنفرض ان $\dim E = n > 1$ فأنه يوجد شعاع ذاتي $0 \neq v_1 \in E$ للتطبيق f .

لنفرض ان النظرية صحيحة من اجل فضاء شعاعي ذا بعد $(n-1)$.

ليكن E_1 فضاءاً شعاعياً جزئياً مولداً بالشعاع v_1،

وليكن $u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$ ، فأن $u_1 \in E_1$ شعاع معياري،

حسب النظرية (7.4.4) فأن : $E = E_1 \oplus E_1^{\perp}$ ،

فأن : $\dim E = \dim E_1 + \dim E_1^{\perp}$ اي ان : $\dim E_1^{\perp} = n-1$.

من الفرضية فأنه يوجد اساس معياري متعامد في E_1،

ولتكن $\{u_2, \ldots, u_n\}$ متكونة من الاشعة الذاتية

للتطبيق f . لكن u_1 معياري وكذلك $u_1 \circ u_i = 0$ لكل

$i = 2, \ldots, n$ ، فأن المجموعة $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ هي اساس معياري

متعامد متكونة من الاشعة الذاتية للتطبيق f .

(و. هـ. م.)

5.4.5 نتيجة

ليكن $(E, \circ)$ فضاءاً أقليدياً ، f تطبيقاً خطياً

على E يحقق $f = f^*$. فأنه يوجد اساس معياري متعامد

في E ، بحيث ان المصفوفة المرافقة للتطبيق f في تلك

الاساس مصفوفة قطرية .

بطريقة مشابهة لبرهان النظرية (4.4.5)، نبرهن النظرية التالية .

6.4.5 نظرية

ليكن $(H, \circ)$ فضاءً هيرميتياً ، f تطبيقاً احادياً على H . فأنه يوجد اساس معياري متعامد في H متكون من الأشعة الذاتية للتطبيق f . وتكون مصفوفة f في هذا الاساس مصفوفة قطرية .

5.5 صيغ جوردان القانونية

1.5.5 تعريف

ليكن V فضاءً شعاعياً على الحقل K ، f تطبيقاً خطياً من V في V و V_1 فضاءً شعاعياً جزئياً من V . نقول ان الفضاء الشعاعي الجزئي V_1 متميز اذا كان $f(V_1) \subseteq V_1$.

2.5.5 نظرية

ليكن V فضاءً شعاعياً على الحقل K ، f تطبيقاً خطياً من V في V ، V_1 فضاءً شعاعياً جزئياً متميزاً في V . فأن المصفوفة المرافقة للتطبيق f هي من الشكل $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ ، حيث A هي المصفوفة المرافقة لمقصور f الى V_1 .

البرهان :

لنرمز لمقصور التطبيق f الى V_1 بالرمز f_1 .

لتكن $\{u_1, \dots, u_r\}$ اساساً في V_1 . نكمل هنا الاساس الى اساس للفضاء V . ولتكن $\{u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s\}$ اساساً للفضاء V . بما ان V_1 متميز في V فأن $f(u_1), \dots, f(u_r) \in V_1$ ، فأن :

$$f_1(u_1) = f(u_1) = a_{11}u_1 + \dots + a_{r1}u_r + 0.v_1 + \dots + 0.v_s$$

$$f_1(u_2) = f(u_2) = a_{12}u_1 + \dots + a_{r2}u_r + 0.v_1 + \dots + 0.v_s$$

- -

$$f_1(u_r) = f(u_r) = a_{1r}u_1 + \dots + a_{rr}u_r + 0.v_1 + \dots + 0.v_s$$

$$f(v_1) = b_{11}u_1 + \dots + b_{r1}u_r + c_{11}v_1 + \dots + c_{s1}v_s$$

$$f(v_2) = b_{12}u_1 + \dots + b_{r2}u_r + c_{12}v_1 + \dots + c_{s2}v_s$$

- -

$$f(v_s) = b_{1s}u_1 + \dots + b_{rs}u_r + c_{1s}v_1 + \dots + c_{ss}v_s$$

فأن المصفوفة المرافقة للتطبيق f هي :

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1r} & b_{11} & b_{12} \dots b_{1s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} \dots a_{rr} & b_{r1} & b_{r2} \dots b_{rs} \\ 0 & 0 \dots 0 & c_{11} & c_{12} \dots c_{1s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots 0 & c_{s1} & c_{s2} \dots c_{ss} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

حيث A هي المصفوفة المرافقة لمقصور f الى V_1 .

3.5.5 نظرية

ليكن V فضاءً شعاعياً على الحقل K ، وليكن f تطبيقاً خطياً من V في V ، وليكن $V_1, \ldots, V_m$ فضاءات شعاعية جزئية متميزة في V بحيث : $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$ ، ولتكن A_i المصفوفة المرافقة لمقصور f الى V_i لكل $i = 1, \ldots, m$. فأن المصفوفة المرافقة للتطبيق f هي :

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_m \end{pmatrix} .$$

البرهان :

لتكن $\{u_{11}, \ldots, u_{n_1 1}\}$ اساساً لـ V_1.

- - - - - - - - - - - - - - - - -

$\{u_{1m}, \ldots, u_{n_m m}\}$ اساساً لـ V_m.

بما ان : $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$ فأن :

المجموعة $\{u_{11}, \ldots, u_{n_1 1}, u_{1m}, \ldots, u_{n_m m}\}$ عبارة عن أساس في V :

نرمز لمقصور f الى V_i بالرمز f_i لكل $i = 1, \ldots, m$.

$$f_1(u_{11}) = f(u_{11}) = a_{11} u_{11} + \cdots + a_{n_1 1} u_{n_1 1} + 0 . u_{12} + \cdots + 0 . u_{n_m m}$$

$$f_1(u_{21}) = f(u_{21}) = a_{12} u_{11} + \cdots + a_{n_1 2} u_{n_1 1} + 0 . u_{12} + \cdots + 0 . u_{n_m m}$$

- -

$$f_1(u_{n_1 1}) = f(u_{n_1 1}) = a_{1 n_1} u_{11} + \cdots + a_{n_1 n_1} u_{n_1 1} + 0 . u_{12} + \cdots + 0 . u_{n_m m} .$$

$$f_2(u_{12}) = f(u_{12}) = 0.u_{11} + \cdots + 0.u_{n_1 1} + c_{11}u_{12} + \cdots + c_{n_2 1}u_{n_2 2} + 0.u_{13} + \cdots + 0.u_{n_m m}$$

$$f_2(u_{n_2 2}) = f(u_{n_2 2}) = 0.u_{11} + \cdots + 0.u_{n_1 1} + c_{1n_2}u_{12} + \cdots + c_{n_2 n_2}u_{n_2 2} + 0.u_{13} + \cdots + 0.u_{n_m m}$$

$$f_m(u_{1m}) = f(u_{1m}) = 0.u_{11} + \cdots\cdots + k_{11}u_{1m} + \cdots + k_{n_m 1}u_{n_m m}$$

$$f_m(u_{n_m m}) = f(u_{n_m m}) = 0.u_{11} + \cdots\cdots + k_{1n_m}u_{1m} + \cdots + k_{n_m n_m}u_{n_m m}.$$

فأن المصفوفة المرافقة للتطبيق f هي :

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n_1} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & & & & & & \\ a_{n_1 1} & a_{n_1 2} & \cdots & a_{n_1 n_1} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{11} & \cdots & c_{1n_2} & 0 \cdots & 0 \\ \cdots & & & & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{n_2 1} & \cdots & c_{n_2 n_2} & 0 \cdots & 0 \\ \cdots & & & & & & & & \\ \cdots & & & & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & k_{11} \cdots & k_{1n_m} \\ \cdots & & & & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & k_{n_m 1} \cdots & k_{n_m n_m} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & A_m \end{pmatrix}$$

(و . هـ . م .)

4.5.5 تعريف

إذا كانت $M = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_m \end{pmatrix}$ مصفوفة كما

في النظرية (3.5.5)، فنقول أن M هو المجموع المباشر

للمصفوفات A_i ، ونكتب : $M = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_m$.

5.5.5 صيغة جوردان القانونية

نسمي المصفوفة

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in M_n(K)$$

بقالب جوردان ونرمز لها بالرمز $J(\lambda; n)$.

إذا كان $n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_p$ بحيث $n = \sum_{i=1}^{p} n_i$ فأن :

$$J(\lambda; n_1, n_2, \ldots, n_p) = J(\lambda; n_1) \oplus \cdots \oplus J(\lambda; n_p) \in M_n(K)$$

ليكن V فضاءاً شعاعياً على الحقل K ، f تطبيقاً خطياً

من V في V ، ولتكن M المصفوفة المرافقة للتطبيق f

في أساس معين . فإذا كانت :

$$M = J(\lambda_1; k_1^{(1)}, \ldots, k_{p_1}^{(1)}) \oplus J(\lambda_2; k_1^{(2)}, \ldots, k_{p_2}^{(2)}) \oplus \cdots \oplus J(\lambda_m, k_1^{(m)}, \ldots, k_{p_m}^{(m)})$$

حيث :

(1) $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ هي قيم ذاتية للتطبيق الخطي f .

(2) $k_1^{(i)} + \cdots + k_{p_i}^{(i)} = n_i$ حيث n_i هي عدد تكرار القيم الذاتية λ_i

في كثيرة الحدود المميز $g(\lambda)$ للتطبيق f.

(3) إذا كانت في كثيرة الحدود الدنيا للمصفوفة M تكرار λ_i هي من الدرجة m_i، فإنه تكون احدى قوالب جوردان على الأقل من الدرجة m_i، والقوالب الباقية هي من الدرجة أقل أو تساوي m_i.

نقول عندئذ ان للمصفوفة M صيغة جوردان القانونية.

6.5.5 أمثلة

(1)

$$J(5;4)=\begin{pmatrix}5&1&0&0\\0&5&1&0\\0&0&5&1\\0&0&0&5\end{pmatrix}$$

(2)

$$J(7;2,1)=J(7;2)\oplus J(7;1)$$

$$=\begin{pmatrix}7&1\\0&7\end{pmatrix}\oplus(7)=\begin{pmatrix}7&1&0\\0&7&0\\0&0&7\end{pmatrix}$$

(3) أكتب صيغ جوردان القانونية للمصفوفة A المرافقة للتطبيق الخطي f الذي كثيرة حدوده المميزة هي: $g(\lambda)=(2-\lambda)^4(3-\lambda)^3$ وكثيرة حدوده الدنيا: $h(\lambda)=(2-\lambda)^2(3-\lambda)^2$.

من التعريف نلاحظ ان $\lambda_1=2$ ، $\lambda_2=3$ تكرار λ_1 هو 4، وتكرار λ_2 هو 3 في كثيرة الحدود المميزة.

في كثيرة الحدود الدنيا تكرار λ_1 هو 2، وتكرار λ_2 هو 2.

فأن صيغ جوردان القانونية هو إما :

$$M = J(2;2) \oplus J(2;1) \oplus J(2;1) \oplus J(3;2) \oplus J(3;1)$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \oplus (2) \oplus (2) \oplus \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \oplus (3)$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & & \\ 0 & 2 & & & & & \\ & & 2 & & & & \\ & & & 2 & & & \\ & & & & 3 & 1 & \\ & & & & 0 & 3 & \\ & & & & & & 3 \end{pmatrix}$$

أو هو :

$$M = J(2;2) \oplus J(2;2) \oplus J(3;2) \oplus J(3;1)$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \oplus (3)$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & & \\ 0 & 2 & & & & & \\ & & 2 & 1 & & & \\ & & 0 & 2 & & & \\ & & & & 3 & 1 & \\ & & & & 0 & 3 & \\ & & & & & & 3 \end{pmatrix}$$

تمـــارين

(1) برهن ان صفر هو قيمـة ذاتيـة للتطبيق الخطي f ⟺ f غير متباين.

(2) اذا كان λ قيمـة ذاتيـة للتطبيق الخطي المتقابل f، فبرهن ان λ^{-1} هو قيمـة ذاتيـة لـ f^{-1}.

(3) في كل الحالات الآتيـة اوجد المصفوفة A المرافقة للتطبيق f، ثم حول المصفوفة هذه الى مصفوفة قطرية ان امكن.

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ معرفاً بـ $f(x_1, x_2) = (-2x_2, 2x_1)$

(b) $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ معرفاً بـ $f(x_1, x_2) = (-2x_2, 2x_1)$

حيث $\mathbb{R}^2$ هو فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{R}$، $\mathbb{C}^2$ هو فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{C}$.

(4) لتكن

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} ، \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

اي من المصفوفتين A، B يمكن جعلها قطرية ؟.

(5) لتكن V فضاءً شعاعياً على الحقل K، f تطبيقاً خطياً من V في V، و V_1 فضاءً شعاعياً جزئياً متميزاً في V،

برهن أن $V_1^{\perp}$ هو ايضاً متميز في V .

(6) ليكن $\mathbb{R}^2$ فضاءً شعاعياً على الحقل $\mathbb{R}$ ، f تطبيقاً خطياً من $\mathbb{R}^2$ في $\mathbb{R}^2$ معرفاً كالآتي :

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \quad ; \quad f(x_1, x_2) = (2x_1 \, , \, x_1 + 3x_2)$$

وليكن :

$$V_2 = \{ (x_1, x_2) : x_1 = 0 \} \quad , \quad V_1 = \{ (x_1, x_2) : x_2 = 0 \}$$

فضاءين شعاعيين جزئيين في $\mathbb{R}^2$. اي من V_1 ، V_2 هو فضاء شعاعي جزئي متميز في $\mathbb{R}^2$ ؟ .

(7) ليكن V فضاءً شعاعياً على الحقل K ، f تطبيقاً خطياً من V في V . برهن انه يوجد لـ V فضاء شعاعي جزئي متميز ذات لعد واحد $\Leftrightarrow$ يوجد قيم ذاتية لـ f .

(8) ليكن f تطبيقاً خطياً من الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^2$ على الحقل $\mathbb{R}$ في نفسه معرفاً كالآتي :

$$f(x_1, x_2) = (x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha \, , \, x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha)$$

حيث $0 < \alpha < \pi$.

برهن انه لا يوجد لـ $\mathbb{R}^2$ فضاء شعاعي جزئي متميز ماعدا $\{0\}$ ، $\mathbb{R}^2$.

(9) لتكن $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ ، أوجد كثيرة حدود بحيث تكون A جذراً لها .

(10) اوجد أدنى كثيرة حدود $h(\lambda)$ للمصفوفة :

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

(11) اوجد كثيرة الحدود الدنيا والمميزة للتطبيق الخطي $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
المعرف بـ: $f(x,y)=(x+y,y)$.

(12) اوجد جميع صيغ جوردان القانونية للمصفوفة :

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(13) اوجد جميع صيغ جوردان القانونية الممكنة لتلك المصفوفات التي كثيرة حدودها المميزة $g(\lambda)$ ، وكثيرة حدودها الدنيا $h(\lambda)$ ، في كل من الحالتين :

(a) $h(\lambda)=(7-\lambda)^2$ ، $g(\lambda)=(7-\lambda)^5$

(b) $g(\lambda)=(3-\lambda)^4(5-\lambda)^4$ ، $h(\lambda)=(3-\lambda)^2(5-\lambda)^2$

(14) اوجد جميع صيغ جوردان القانونية الممكنة لـ :
$J(\lambda; k_1, k_2, k_3) \in M_3(K)$.

(15) ليكن $(H,\circ)$ فضاءً هيرميتياً ، f تطبيقاً احادياً على

H ، λ قيمة ذاتية لـ f .

(a) برهن ان $(f-\lambda Id_H)$ تطبيق احادي .

(b) برهن ان كل شعاع ذاتي للتطبيق f هو شعاع ذاتي للتطبيق f^* .

(c) برهن ان الاشعة الذاتية المشاركة لقيم ذاتية مختلفة متعامدة .

(16) ليكن V فضاءاً شعاعياً على الحقل K ، وليكن f تطبيقاً خطياً من V في V و $v \in V$. نفرض ان f يحقق $f^k(v)=0$ ، $f^{k-1}(v)\neq 0$ حيث $k \in N$.

(a) برهن ان المجموعة $S=\{v, f(v),\dots, f^{k-1}(v)\}$ مجموعة مستقلة خطياً .

(b) برهن ان الفضاء الشعاعي الجزئي V_1 المولد بـ S متميز في V .

(c) برهن ان مقصور f الى V_1 والذي نرمز له بـ f_1 ، يحقق : $f_1^k(v)=0$ ، $f_1^{k-1}(v)\neq 0$.

(d) برهن ان المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي f في الأساس $\{v, f(v),\dots, f^{k-1}(v)\}$ للفضاء V_1 هي من الشكل :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

الفصل السادس
الفضاء الترابطي

1 . 6 مبادئ أولية

1 . 1 . 6 تعريف

ليكن V فضاءً شعاعياً على الحقل K ، ولتكن T مجموعة غير خالية . إذا وجد التطبيق ω من $T \times T$ في V، يحقق الشروط التالية :

(1) لكل $a \in T$ ولكل $v \in V$ يوجد $b \in T$ وحيد بحيث $\omega(a,b) = v$.

(2) لكل $a, b, c \in T$ ، $\omega(a,b) + \omega(b,c) = \omega(a,c)$

نقول عندئذ ان T فضاء ترابطي مرتبط بالفضاء الشعاعي V. ونرمز أحياناً للفضاء الترابطي من هذا النوع بالرمز (T, V, ω) ، وسنعتبر V فضاء شعاعي على الحقل K دائماً في هذا الفصل . احياناً نكتفي بكتابة T كرمز للفضاء الترابطي . نسمي عناصر T بنقاط الفضاء الترابطي ، وعناصر V بالأشعة ، ونسمي التطبيق ω بخريطة الفضاء الترابطي . بعد الفضاء الترابطي هو بعد الفضاء الشعاعي المرتبط به، ونرمز له بالرمز $\dim(T)$.

نلاحظ انه لكل $a \in T$ ، $\omega(a,a) = 0_V$ لأنه حسب الشرط (2) من التعريف :

$$\omega(a,a) + \omega(a,a) = \omega(a,a)$$

فأن : $\omega(a,a) = 0_V$.

من هنا ومن الشرط (2) من التعريف نستنتج انه لكل $a, b \in T$

$$\omega(a,b) + \omega(b,a) = \omega(a,a) = 0_V$$

فأن : $\omega(a,b) = -\omega(b,a)$.

2.1.6 مثال

ليكن V فضاءاً شعاعياً على الحقل K . لنأخذ المجموعة V والتطبيق $\omega : V \times V \to V$ المعرف بالشكل :-

$$\forall (a,b) \in V \times V \quad ; \quad \omega(a,b) = a - b$$

فأنه لكل $a \in V$ ولكل $v \in V$ يوجد $b \in V$ وحيد، بحيث

$$\omega(a,b) = a - b = v$$

وكذلك لكل $a, b, c \in V$ فأن :

$$\omega(a,b) + \omega(b,c) = (a-b) + (b-c) = a - c = \omega(a,c)$$

ومنه، فأن (V, V, ω) فضاء ترابطي .

3.1.6 تعريف

ليكن T فضاءاً ترابطياً ، لكل $a \in T$ ولكل $v \in V$ فأنه حسب (1.1.6) يوجد $b \in T$ وحيد، بحيث ان $\omega(a,b) = v$. النقطة b تسمى بحاصل جمع النقطة a والشعاع v ويرمز لها بالرمز $a + v$. حاصل جمع النقطة a والشعاع $-v$ نرمز لها بالرمز $a - v$ ، ونقول انها حاصل طرح النقطة a والشعاع v.

من هذا التعريف نستنتج انه لكل $a \in T$ ولكل $v \in V$:

$$\omega(a, a+v) = v$$

وكذلك لكل $v_1, v_2 \in V$ ، ولكل $a \in T$ فأن :

$$\omega(a+v_1, a+v_2) = \omega(a+v_1, a) + \omega(a, a+v_2)$$
$$= \omega(a, a+v_2) - \omega(a, a+v_1) = v_2 - v_1$$

4.1.6 نظرية

ليكن T فضاءاً ترابطياً ، لكل $v_1, v_2 \in V$ ولكل $a, b \in T$ فأن :

(1) إذا كان $a+v_1 = b+v_1$ فأن : $a = b$. وإذا كان $a+v_1 = a+v_2$ فأن : $v_1 = v_2$.

(2) $a+v_1 = b \iff \omega(a,b) = v_1$

بشكل خاص $a+v_1 = a \iff v_1 = 0_V$.

(3) $(a+v_1)+v_2 = a+(v_1+v_2)$

البرهان :

(1) إذا كان $a+v_1 = b+v_1$ فأن :

$$\omega(a+v_1, a) = -\omega(a, a+v_1) = -v_1 = -\omega(b, b+v_1) =$$
$$= \omega(b+v_1, b) = \omega(a+v_1, b)$$

حسب التعريف (1.1.6) فأن : $a = b$.

وكذلك إذا كان $a+v_1 = a+v_2$ ، فأن :

$$v_1 = \omega(a, a+v_1) = \omega(a, a+v_2) = v_2$$

(2) ينتج البرهان مباشرة من تعريف $a+v_1$ ومن التعريف (1.1.6) .

بشكل خاص إذا كان $a=b$ ، بما ان $\omega(a,a)=0_V$ فأن $a+v=a \Leftrightarrow v=0$.

(3) لنفرض ان $a+v_1=a_1$ وان $(a+v_1)+v_2=a_2$ فأن :

$$\omega(a,a_1)=v_1 \quad , \quad \omega(a_1,a_2)=v_2$$

من هنا وحسب (1.1.6) فأن :

$$v_1+v_2=\omega(a,a_1)+\omega(a_1,a_2)=\omega(a,a_2)$$

فاذا فرضنا ان $\omega(a,a_2)=v_3$ فأن $a+v_3=a_2$ ومنه

$$a+\omega(a,a_2)=a_2$$

فأن :

$$a+(v_1+v_2)=a+\omega(a,a_2)=a_2=(a+v_1)+v_2$$

(و.هـ.م.)

6.2 الفضاء الترابطي الجزئي

ليكن T فضاءً ترابطياً مرتبطاً بالفضاء الشعاعي V ، ولتكن T_1 مجموعة جزئية غير خالية من T ، V_1 مجموعة جزئية من V . فأن T_1+V_1 هي مجموعة جميع العناصر $a+v$ لكل $a\in T_1$ ، $v\in V_1$.

إذا كانت $T_1=\{a\}$ فأننا نكتب $a+V_1$ وإذا كانت $V_1=\{v\}$ عندئذ نكتب T_1+v .

إذا كانت T_1, T_2 مجموعتين جزئيتين من T ، فأن $\omega(T_1,T_2)$ هي مجموعة جميع الاشعة $\omega(a,b)$ لكل $a\in T_1$ و $b\in T_2$.

إذا كانت $T_1=\{a\}$ مثلاً ، عندئذ نكتب $\omega(a,T_2)$.

من هنا يبرهن بسهولة انه لكل $a,b \in T$ ، فأن :

$$\omega(a,b) + \omega(b,T_1) = \omega(a,T_1) \qquad (1)$$

$$\omega(a, b+V_1) = \omega(a,b) + V_1 \qquad (2)$$

$$a + \omega(a,T_1) = T_1 \qquad (3)$$

1.2.6 نظرية

ليكن T فضاءاً ترابطياً ولتكن $\{a_i\}_{i\in I}$ مجموعة نقاط في T ، $\{\lambda_i\}_{i\in I}$ مقادير سلمية من الحقل K بحيث ان $\sum_{i\in I} \lambda_i = 1$. لأي نقطة $a \in T$ ، فأن المجموع : $a + \sum_{i\in I} \lambda_i \omega(a, a_i)$ لا يعتمد على اختيار النقطة a .

البرهان :

لتكن a' أي نقطة اخرى في T ، فأن :

$$a' + \sum_{i\in I} \lambda_i \omega(a', a_i) = a' + \sum_{i\in I} \lambda_i (\omega(a',a) + \omega(a, a_i))$$

$$= a' + (\sum_{i\in I} \lambda_i)\, \omega(a',a) + \sum_{i\in I} \lambda_i \omega(a, a_i)$$

$$= a' + \omega(a',a) + \sum_{i\in I} \lambda_i \omega(a, a_i)$$

$$= a + \sum_{i\in I} \lambda_i\, \omega(a, a_i)$$

وبذلك فأن المجموع $a + \sum_{i\in I} \lambda_i \omega(a, a_i)$ لا يعتمد على اختيار النقطة a . (و.هـ.م.)

2.2.6 تعريف

ليكن T فضاءً ترابطياً، ولتكن $\{a_i\}_{i\in I}$ مجموعة نقاط من T ، $\{\lambda_i\}_{i\in I}$ مقادير سلبية من الحقل K بحيث ان $\sum_{i\in I} \lambda_i = 1$. نسمي المجموعة $\{\lambda_i\}_{i\in I}$ بمجموعة ثقل، وتسمى النقطة $a + \sum_{i\in I} \lambda_i \,\omega(a, a_i)$ مركز ثقل مجموعة النقاط $\{a_i\}_{i\in I}$ ذي الثقل $\{\lambda_i\}_{i\in I}$ لأية نقطة $a \in T$.

نرمز لمركز ثقل مجموعة النقاط $\{a_i\}_{i\in I}$ ذي الثقل $\{\lambda_i\}_{i\in I}$ بالرمز $\sum_{i\in I} \lambda_i a_i$. نسمي النقطة b بمركز ثقل المجموعة $\{a_i\}_{i\in I}$ اذا وجدت مجموعة ثقل $\{\lambda_i\}_{i\in I}$ ، بحيث ان $b = \sum_{i\in I} \lambda_i a_i$.

3.2.6 تعريف

ليكن T فضاءً ترابطياً ، ولتكن T_1 مجموعة جزئية غير خالية من T ، فأذا كانت لكل مجموعة من النقاط $\{a_i\}_{i\in I}$ من T_1 ، ولكل مجموعة مقادير سلبية $\{\lambda_i\}_{i\in I}$ فأن مركز الثقل $\sum_{i\in I} \lambda_i a_i$ هو عنصر من T_1 . نقول عندئذ ان T_1 هو فضاء ترابطي جزئي من T .

4.2.6 نظرية

ليكن T فضاءً ترابطياً ، T_1 مجموعة جزئية غير خالية من T فأن الشروط التالية متكافئة :

(١) T_1 هو فضاء ترابطي جزئي من T .

(٢) لكل $a \in T_1$ فأن المجموعة $\omega(a, T_1)$ هي فضاء شعاعي جزئي من V .

البرهان :

(١) ⟵ (٢)

لتكن a نقطة من T ، لكل $v_1, v_2 \in \omega(a, T_1)$ فأن :

$v_1 = \omega(a, a_1)$ ، $v_2 = \omega(a, a_2)$ ، حيث $a_1, a_2 \in T_1$.

فأن :

$$a + (v_1 + v_2) = a + \left((-1)\,\omega(a,a) + \omega(a,a_1) + \omega(a,a_2)\right)$$

فأنه حسب (2.2.6) ، (3.2.6) :

$$a + (v_1 + v_2) = (-1)\,a + 1.a_1 + 1.a_2 \in T_1$$

فأن : $a + (v_1 + v_2) = c \in T_1$ وأن :

$$v_1 + v_2 = \omega(a, c) \in \omega(a, T_1)$$

لكل $\lambda \in K$ فأن :

$$a + \lambda v_1 = a + \left((1-\lambda)\,\omega(a,a) + \lambda\,\omega(a,a_1)\right)$$

$$= (1-\lambda)\,a + \lambda a_1 \in T_1$$

فأن : $a + \lambda v_1 = c \in T_1$

فأن : $\lambda v_1 = \omega(a, c) \in \omega(a, T_1)$

ومنه $\omega(a, T_1)$ هي فضاء شعاعي جزئي من V .

(٢) ⟵ (١)

لنفرض ان المجموعة $\omega(a, T_1)$ هي فضاء شعاعي جزئي من V حيث $a \in T_1$ ، ولتكن $\{a_i\}_{i \in I}$ مجموعة من نقاط المجموعة

T_1 فأنه لأي مجموعة ثقل $\{\lambda_i\}_{i\in I}$ فأن :

$$\sum_{i\in I} \lambda_i a_i = a + \sum_{i\in I} \lambda_i \omega(a, a_i)$$

وحيث ان $\omega(a,a_i) \in \omega(a, T_1)$ لكل $i \in I$. من الفرضية

فأن : $\sum_{i\in I} \lambda_i \omega(a, a_i) \in \omega(a, T_1)$ ، فأن $\sum_{i\in I} a_i \lambda_i \in T_1$.

بهذا فأن T_1 فضاء ترابطي جزئي من T .

(و.هـ.م.)

5.2.6 نظرية

ليكن T فضاءاً ترابطياً ، T_1 مجموعة جزئية غير خالية و $a \in T_1$ فأن T_1 هو فضاء ترابطي جزئي من T $\Leftrightarrow$ يوجد فضاء شعاعي جزئي V_1 من V بحيث ان $T_1 = a + V_1$.

البرهان :

نفرض ان T_1 هو فضاء ترابطي جزئي من T ، فأنه حسب النظرية (4.2.6) ، $\omega(a, T_1)$ هو فضاء شعاعي جزئي من V . لكل $b \in T_1$ فأن $b = a + \omega(a,b)$.

لكن $\omega(a,b) \in \omega(a, T_1)$ فأن $b \in a + \omega(a, T_1)$.

بنفس الطريقة لكل $x \in a + \omega(a, T_1)$ فأن : $x = a + \omega(a,c)$ حيث $c \in T_1$. فأن $c = a + \omega(a,c)$. فأن $x \in T_1$

وبذلك فأن $T_1 = a + \omega(a, T_1)$. اي انه يوجد فضاء شعاعي جزئي $V_1 = \omega(a, T_1)$ من الفضاء V بحيث $T_1 = a + V_1$.

لنفرض الآن انه يوجد فضاء شعاعي جزئي V_1 من الفضاء V بحيث $T_1 = a + V_1$ فأن : $\omega(a, T_1) = \omega(a, a + V_1)$

لكل $x \in \omega(a, a+V_1)$ فأن $x = \omega(a, a+v)$ حيث $v \in V_1$.

فأن : $x = \omega(a, a+v) = v \in V_1$ ، وكذلك لكل $v \in V_1$

فأنه ليوجد $b \in T_1$ بحيث $a + \omega(a,b) = b$.

لكن $T_1 = a + V_1$ ، فأن : $b = a + v$ حيث $v \in V_1$.

فأن : $a + \omega(a, a+v) = a + v$ ومنه $\omega(a, a+v) = v$

بهذا فأن: $v \in \omega(a, a+V_1)$.

وبذلك فأن: $V_1 = \omega(a, a+V_1)$ ، ومنه $\omega(a, T_1) = V_1$ ، وهي فضاء شعاعي جزئي من V .

ومن هنا فأن T_1 هي فضاء ترابطي جزئي من T .

(و. هـ. م.)

من هنا نستنتج ان كل فضاء ترابطي جزئي T_1 من الفضاء الترابطي T مرتبط بفضاء شعاعي جزئي V_1 من الفضاء الشعاعي V ، بحيث ان (T_1, V_1, ω) هو نفسه فضاء ترابطي، وان $T_1 = a + V_1$ لـ $a \in T_1$.

6 . 2 . 6 تعريف

ليكن (T_1, V_1, ω) ، (T_2, V_2, ω) فضاءين ترابطيين جزئيين من الفضاء الترابطي (T, V, ω) . نقول ان T_1 موازي لـ T_2 ونكتب $T_1 // T_2$ اذا كان $V_1 = V_2$.

6 . 2 . 7 نظرية

ليكن (T, V, ω) فضاءاً ترابطياً ، وليكن V_1 فضاءاً

شعاعياً جزئياً من V ، T_1 مجموعة جزئية من T ،

$a,b\in T$ فأنه :

(1) إذا كان $\omega(a,b)\notin V_1$ فأن : $(a+V_1)\cap(b+V_1)=\phi$

(2) إذا كان $\omega(a,b)\in V_1$ فأن : $a+V_1=b+V_1$

البرهان :

(1) لنفرض ان $\omega(a,b)\notin V_1$ ولنفرض ان $(a+V_1)\cap(b+V_1)\neq\phi$

فأنه يوجد $c\in(a+V_1)\cap(b+V_1)$ فأن :

$c=a+v_1$ ، $c=b+v_2$ لـ $v_1,v_2\in V_1$ فأن :

$a+v_1=b+v_2$ اي ان $b=a+(v_1-v_2)$

من هنا فأن : $\omega(a,b)=\omega(a,a+(v_1-v_2))=v_1-v_2\in V_1$

وهذا يخالف الفرض ان $\omega(a,b)\notin V_1$ فأن :

$$(a+V_1)\cap(b+V_1)=\phi$$

(2) ليكن $\omega(a,b)\in V_1$ ، $v\in V_1$ فأن $v_2=(\omega(a,b)+v)\in V_1$

وكذلك $\omega(a,a+v)=v$.

فأن : $\omega(a,a+v_2)=\omega(a,a+(\omega(a,b)+v))=\omega(a,b+v)$

فأن : $a+v_2=b+v$

من هنا بسهولة نبرهن أن : $a+V_1=b+V_1$

(و.هـ.م.)

8.2.6 نتيجة

إذا كان (T_1,V_1,ω) ، (T_2,V_2,ω) فضاءين ترابطيين جزئيين من الفضاء الترابطي (T,V,ω) ، فأنه إذا كان $T_1//T_2$ فأن $T_1=T_2$ أو $T_1\cap T_2=\phi$.

9.2.6 نظرية (نظرية أقليدس).

لكل فضاء ترابطي جزئي (T_1, V_1, ω) من الفضاء الترابطي (T, V, ω) ولكل نقطة $a \in T$، يوجد فضاء ترابطي جزئي واحد فقط والذي يحوي a، ويكون موازياً للفضاء الترابطي الجزئي T_1.

البرهان:

نأخذ الفضاء الترابطي الجزئي $(a + V_1, V_1, \omega)$ فأن:

$\dim(a + V_1) = \dim T_1 = \dim V_1$ ، وكذلك $a = a + 0_V \in a + V_1$

فأن: $a + V_1 = T_2$ فضاء ترابطي جزئي موازي للفضاء الترابطي T_1 ويحوي a ، وهو وحيد.

(و.هـ.م.)

10.2.6 نظرية

تقاطع مجموعة من الفضاءات الترابطية الجزئية هي مجموعة خالية، أو فضاء ترابطي جزئي.

البرهان:

ليكن $\{(T_i, V_i, \omega)\}_{i \in I}$ مجموعة من الفضاءات الترابطية الجزئية من الفضاء الترابطي (T, V, ω).

لنفرض ان $\bigcap_{i \in I} T_i \neq \emptyset$ ، فأنه يوجد $a \in \bigcap_{i \in I} T_i$، فأن $a \in T_i$ لكل $i \in I$.

بذلك فأن $T_i = a + V_i$ لكل $i \in I$.

من هنا نلاحظ ان:

$$(b \in \bigcap_{i \in I} T_i) \Leftrightarrow (\forall i \in I \; b \in T_i) \Leftrightarrow (\forall i \in I \; b \in a + V_i) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\forall i \in I \ , \ b = a + v \ , \ v \in V_i) \Leftrightarrow (b \in a + \bigcap_{i \in I} V_i)$$

وبذلك فأن :

$$\bigcap_{i \in I} T_i = a + \bigcap_{i \in I} V_i$$

فأن :

$(\bigcap_{i \in I} T_i , \bigcap_{i \in I} V_i , \omega)$ هو فضاء ترابطي جزئي من الفضاء الترابطي (T, V, ω) .

(و.هـ.م.)

3.6 التطبيقات الترابطية

1.3.6 تعريف

ليكن (T_1, V_1, ω_1) ، (T_2, V_2, ω_2) فضاءين ترابطيين. نسمي التطبيق $f : T_1 \to T_2$ تطبيقاً ترابطياً إذا وجد تطبيق خطي $h : V_1 \to V_2$ بحيث :

لكل $a \in T_1$ ولكل $v \in V_1$ ، $f(a+v) = f(a) + h(v)$

ويسمى h في هذه الحالة بالتطبيق الخطي المرتبط بـ f .

2.3.6 نظرية

كل تطبيق ترابطي يحدد بواسطة صورة نقطة والتطبيق الخطي المرتبط به .

البرهان :

ليكن f تطبيقاً ترابطياً من T_1 في T_2 . وليكن $a \in T_1$ ، ولنفرض ان $f(a) = b$ حيث $b \in T_2$.

وليكن h تطبيقاً خطياً مرتبطاً ب f . لكل $c \in T_1$ فأن

$$c = a + \omega(a, c)$$

اي ان : $f(c) = f(a) + h(\omega(a, c))$

وبذلك فأن: $f(c) = b + h(\omega(a, c))$

فأن f محدد بواسطة النقطة b والتي هي صورة النقطة a والتطبيق الخطي المرتبط به h .

ليكن f تطبيقاً من T_1 في T_2 معرفاً بالشكل التالي :

$$\forall c \in T_1 , \quad f(c) = b + h(\omega(a, c))$$

نبرهن ان f تطبيق ترابطي .

لكل $c_1 \in T_1$ ولكل $v \in V_1$ يوجد $c_2 \in T_1$ وحيد بحيث

$\omega(c_1, c_2) = v$ فأن : $c_1 + \omega(c_1, c_2) = c_2$

كذلك $f(c_1) = b + h(\omega(a, c_1))$

$$f(c_2) = b + h(\omega(a, c_2))$$

فأن :

$$f(c_2) - f(c_1) = h(\omega(a, c_2)) - h(\omega(a, c_1))$$
$$= h(\omega(a, c_2) - \omega(a, c_1))$$
$$= h(\omega(c_1, c_2))$$

فأن :

$$f(c_2) = f(c_1) + h(\omega(c_1, c_2))$$

اي ان : $f(c_1 + v) = f(c_1) + h(v)$

بهذا فأن f تطبيق ترابطي .

(و . هـ . م .)

3.3.6 نظرية

ليكن (T_1, V_1, ω_1) ، (T_2, V_2, ω_2) ، (T_3, V_3, ω_3) ثلاث فضاءات ترابطية . وليكن f_1 تطبيقاً ترابطياً من T_1 في T_2 و h_1 تطبيقاً خطياً مرتبطاً به ، f_2 تطبيقاً ترابطياً من T_2 في T_3 و h_2 تطبيقاً خطياً مرتبطاً به ، فأن $f_2 \circ f_1$ هو تطبيق ترابطي من T_1 في T_3 ، والتطبيق الخطي المرتبط به هو $h_2 \circ h_1$.

البرهان :

حسب النظرية $(3.1.2)$ $h_2 \circ h_1$ هو تطبيق خطي من الفضاء V_1 في الفضاء V_3 .

لكل $a \in T_1$ ولكل $v \in V_1$ يوجد $b \in T_1$ بحيث $\omega(a,b) = v$ فأن $b = a + v$ و

$$\begin{aligned}(f_2 \circ f_1)(b) &= (f_2 \circ f_1)(a+v) \\ &= f_2\,(f_1(a+v)) \\ &= f_2\,(f_1(a) + h_1(v))\end{aligned}$$

لكن $h_1(v) \in V_2$ ، $f_1(a) \in T_2$ فأن :

$$\begin{aligned}(f_2 \circ f_1)(b) &= f_2(f_1(a)) + h_2(h_1(v)) \\ &= (f_2 \circ f_1)(a) + (h_2 \circ h_1)(v)\end{aligned}$$

بهذا فأن : $(f_2 \circ f_1)(a+v) = (f_2 \circ f_1)(a) + (h_2 \circ h_1)(v)$

وبذلك فأن $f_2 \circ f_1$ هو تطبيق ترابطي من T_1 في T_3 و $h_2 \circ h_1$ هو التطبيق الخطي المرتبط به . (و.هـ.م.)

4.3.6 نظرية

ليكن (T_1, V_1, ω_1) ، (T_2, V_2, ω_2) فضاءين ترابطيين وليكن f تطبيقاً ترابطياً من T_1 في T_2 ، h تطبيقاً خطياً مرتبطاً به فأن :

(1) f متباين $\Leftrightarrow$ h متباين

(2) f غامر $\Leftrightarrow$ h غامر

البرهان :

(1) لنفرض ان h متباين ، لكل $a, b \in T_1$ وإذا كان $f(a)=f(b)$ كذلك $a = b + \omega_1(b,a)$ فأن :

$$f(a) = f(b) + h(\omega_1(b,a))$$

وبذلك فأن : $h(\omega_1(b,a)) = 0$

فأن : $\omega_1(b,a) \in Ker\, h$ ومنه $\omega_1(b,a) = 0_V$ اي ان

$a = b$ بهذا فأن f متباين .

لنفرض ان h غير متباين ، فأنه يوجد شعاع غير صفري $v \in V$ بحيث $h(v) = 0$ ، وليكن $a \in T_1$ فأنه يوجد $b \in T_1$ و $a \neq b$ بحيث $b = a + v$.

$$f(b) = f(a+v) = f(a) + h(v) = f(a)$$

ومنه نستنتج ان f غير متباين .

(2) لنفرض ان f غامر ، وليكن $v \in V_2$ فأذا كان $b \in T_1$ فأن : $f(b) + v \in T_2$ ، فأنه يوجد $a \in T_1$ بحيث $f(b) + v = f(a)$ ومنه فأن : $h(\omega_1(a,b)) = v$

بهذا فأن h غامر .

لنفرض الآن ان h غامر وليكن $a \in T_2$ فأذا كان $b \in T_1$

فأن $\omega_2(f(b), a) \in V_2$ ، وبهذا فأنه يوجد $v \in V_2$ ، بحيث

$$h(v) = \omega_2(f(b), a) \quad : \quad \text{فأن} \quad f(b) + h(v) = a$$

ليكن $a_1 = b + v$

فأن : $h(v) = \omega_2(f(b), f(a_1))$ اي ان $f(a_1) = f(b) + h(v)$

فأن $f(a_1) = a$ وبذلك فأن f غامر .

(و.هـ.م.)

5.3.6 تعريف

ليكن (T_1, V_1, ω_1) ، (T_2, V_2, ω_2) فضاءين ترابطيين ،
وليكن f تطبيقاً ترابطياً من T_1 في T_2 . نقول ان
f هو ايزومورفيزم فضاءات ترابطية اذا وجد تطبيق
ترابطي g من T_2 في T_1 بحيث :

$$g \circ f = Id_{T_2} \quad , \quad f \circ g = Id_{T_1} .$$

وهذا يعني ان f تقابل ، من هنا ومن النظرية (4.3.6)
فأن التطبيق h المرافق لـ f ايضاً يكون تقابلاً .

6.3.6 نظرية

ليكن (T_1, V_1, ω_1) ، (T_2, V_2, ω_2) فضاءين ترابطيين ،
و f ايزومورفيزم فضاءات ترابطية من T_1 على T_2 ، فأن
f^{-1} هو ايضاً ايزومورفيزم فضاءات ترابطية من T_2 على
T_1 .

البرهان :

واضح ان $f \circ f^{-1} = Id$ ، $f^{-1} \circ f = Id_{T_1}$

نبرهن ان f^{-1} هو تطبيق ترابطي .

لكل $a \in T_2$ ولكل $v \in V_2$ ، فأنه يوجد $a_1 \in T_1$ و $v_1 \in V_1$

بحيث $f(a_1) = a$ ، $h(v_1) = v$

فأن :

$$f^{-1}(a+v) = f^{-1}(f(a_1) + h(v_1))$$
$$= f^{-1}(f(a_1 + v_1))$$
$$= (f^{-1} \circ f)(a_1 + v_1)$$
$$= a_1 + v_1 = f^{-1}(a) + h^{-1}(v)$$

بهذا فأن f^{-1} تطبيق ترابطي .

(و.هـ.م.)

تمــــــارين

(1) ليكن (T_n, V_n, ω_n) ، .... ، (T_1, V_1, ω_1)
فضاءات ترابطية ، لكل $(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \in T_1 \times \dots \times T_n$:

$$\omega((a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)) = (\omega_1(a_1, b_1), \dots\dots, \omega_n(a_n, b_n))$$

برهن ان : $(T_1 \times \dots \times T_n, V_1 \times \dots \times V_n, \omega)$ هو فضاء ترابطي .

(2) ليكن (T, V, ω) فضاءاً ترابطياً ، لكل $a, b, c \in T$
برهن ان : $\omega(a,b) + \omega(b,c) + \omega(c,a) = 0$.
ثم برهن انه لكل $a_1, \dots, a_n \in T$ فأن :

$$\omega(a_1, a_2) + \omega(a_2, a_3) + \dots + \omega(a_{n-1}, a_n) + \omega(a_n, a_1) = 0$$

مستنتجاً ان :

$$\omega(a_1, a_n) = \omega(a_1, a_2) + \dots + \omega(a_{n-1}, a_n)$$

(3) اوجد مركز ثقل مجموعة النقاط $(0,1,0)$ ، $(1,1,1)$ ،
$(2,0,1)$ في الفضاء الترابطي $\mathbb{R}^3$ ذي الأثقال 2 ، -1 ، 1
على التوالي .

(4) برهن ان النقطة $(0,0,0)$ هي مركز ثقل مجموعة النقاط
$(0,0,1)$ ، $(0,1,0)$ ، $(1,1,1)$ ، $(1,0,0)$ في الفضاء
الترابطي K^3 حيث K حقل .

(5) ليكن IR^2 فضاءً ترابطياً مرتبطاً بالفضاء الشعاعي IR^2 ، وليكن $g : IR^2 \to IR^2$ تطبيقاً معرفاً كالآتي :

$$\forall (x_1, x_2) \in IR^2 , \quad g(x_1, x_2) = (-x_1 - 1 , -x_2 + 1)$$

برهن ان g تطبيق ترابطي .

(6) برهن ان التطبيق الترابطي يحافظ على مركز الثقل .

(7) برهن ان صورة الفضاء الترابطي الجزئي وفق التطبيق الترابطي هو فضاء ترابطي جزئي .

فهرست الرموز

فهرست المواضيع

المصادر

Lectures in abstract algebra : N. Jacobson [1]

Algébre : M. Queysanne [2]

Algebra liniowa z geometria : A. Białynicki - Birula [3]

Algebra : Bolesław Gleichgewicht [4]

ب . بن زاغو : المدخل الى الجبر الخطي [5]

سيمور ليبشتز : الجبر الخطي [6]

Repetytorium z algebry Liniowej : H. Guściora . M. Sadowski [7]

Algebra liniowa : E. Stolarskiej [8]

Wektory i macierze : Mieczysław Warmus [9]

Algebra Liniowa : M. Stark . A. Mostowski [10]